Kovács Barna

Szöveges feladatok megoldási módszerei

Presa Universitară Clujeană

Kovács Barna

Szöveges feladatok megoldási módszerei

Presa Universitară Clujeană

2018

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. **Kása Zoltán**

Conf. univ. dr. **Kupán A. Pál**

ISBN 978-606-37-0357-7

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro

TARTALOM

ELŐSZÓ

A könyv feladatait a kolozsvári Babeş-Bolyai tudományegyetem Pszichológia és Neveléstudományi karának Marosvásárhelyre kihelyezett tagozatán mutattuk be az elmúlt évek során, a *Matematika oktatásának módszertana* előadás keretében a tanítóképzős diákoknak. A könyv sorra veszi a klasszikus megoldási módszereket, úgy, mint *ábrázolás, hipotézisek módszere, egységre való visszavezetés illetve arányosságok módszere, mérleg módszer, összehasonlítás módszere, átrendezés módszere* és a *téglalap módszere*. Külön fejezetet szenteltünk az elemi osztályokban a matematikai tantárgyversenyeken adott feladatoknak. A könyv utolsó fejezetében egy 1812-ben kiadott, magyarul írott könyv aritmetikai módszerekkel is megoldható feladatait mutatjuk be. Minden fejezet esetében, a megoldott feladatok mellett, megtalálhatók az útmutatásokkal ellátott illetve a kitűzött, megoldásra váró feladatok.

A szerző köszönetet mond a könyv szaklektorainak: dr. Kása Zoltánnak és dr. Kupán Pálnak a kézirat átolvasásakor megtett észrevételekért, illetve a marosvásárhelyi diákok nem kis seregének, akik konok elszántsággal, példák sokaságát megoldva készültek, és továbbra is készülnek, a szemináriumokra, vizsgákra.

Marosvásárhely, 2018 Húsvét harmadnapján.

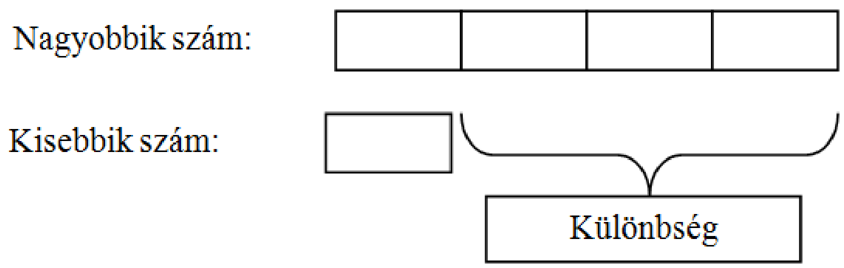
1. FEJEZET

ÁBRÁZOLÁS MÓDSZERE

Az ábrázolás módszerének alapötlete az, hogy a feladat adatait, összefüggéseit, a feladat mondataiba ágyazott információkat ábrázoljuk, szándékunk szerint részletesen, arányosan, áttekinthetően és figyelembe véve a feladat dinamikáját: a folyamatokat nem feltétlenül egy ábra segítségével szemléltetjük, hanem esetenként több ábra révén próbáljuk meg szemléltetni, elmagyarázni majd megoldani a kitűzött feladatot. A következőkben ismertetett feladatok mindegyikének van algebrai, tehát egyenleteket használó, megoldása. Mi az algebrai megoldás ismertetésétől eltekintünk, viszont bátorítjuk az olvasót új feladatok megírására: ilyenkor a feladatot leíró egyenletrendszer nélkülözhetetlen.

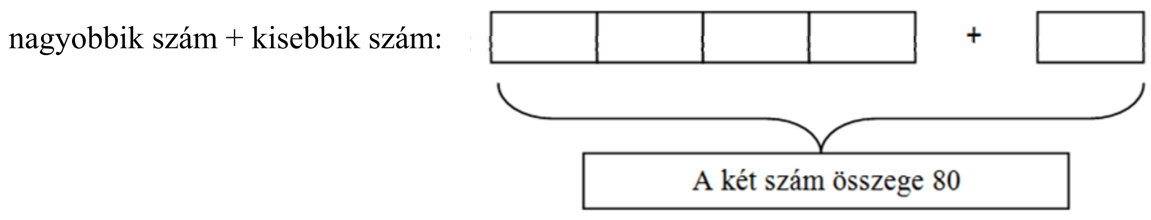
Megoldott feladatok

1. Két szám összege 80. A különbségük a kisebbik szám háromszorosa. Határozzuk meg ezt a két számot!
   Megoldás: A megoldást a második mondatból indítjuk:"*különbségük a kisebbik szám háromszorosa*". Ábrázoljuk azt, amit eddig megtudtunk:



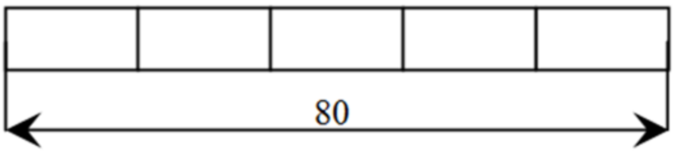
1. ábra

Tehát:



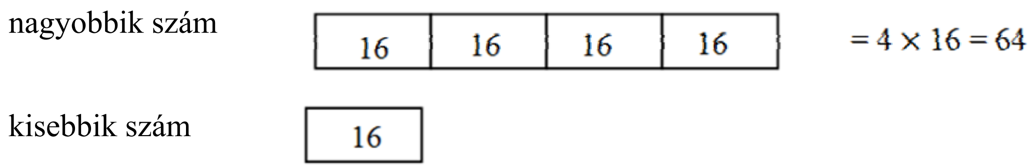
2. ábra

Azaz:



3. ábra

Észrevehető (3. ábra), hogy öt azonos hosszúságú téglalap hossza 80, vagyis egy kis téglalaphoz rendelt hossz 80:5 = 16.
Visszatérünk az első ábránkhoz, amellyel indítottuk a feladat megoldását, és az egyes téglalapokhoz hozzárendeljük a számított értéket, a 16-ot (4. ábra).



4. ábra

Azaz a nagyobbik szám 64, a kisebbik szám 16 (4. ábra).

Próba:

64+16=80 „*a két szám összege 80*";

80-16=64;

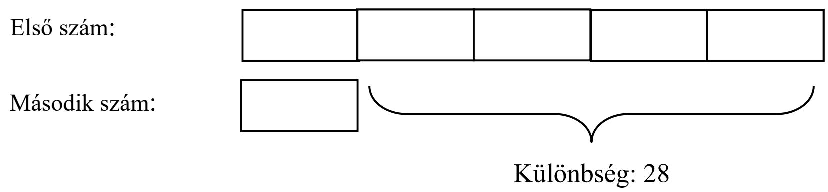
64:4=16 "*különbségük a kisebbik szám háromszorosa*"; □

2. Két szám különbsége 28, arányuk 5. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

A második megállapításból indulunk ki, mely szerint a két szám aránya 5, vagyis az egyik szám *ötször nagyobb,* mint a másik (5. ábra).

Így:



5. ábra

Megállapítható (5. ábra), hogy egy kis téglalap hossza 28:4 = 7 értéknek felel meg. Az első szám 5 ilyen kis téglalapból áll, tehát az első szám: 5 × 7 = 35, míg a második szám: 5-tel egyenlő.

Próba:

„*Két szám különbsége 28"*: 35 – 7 = 28;

„*Két szám aránya 5":* 35 : 7 = 5. □

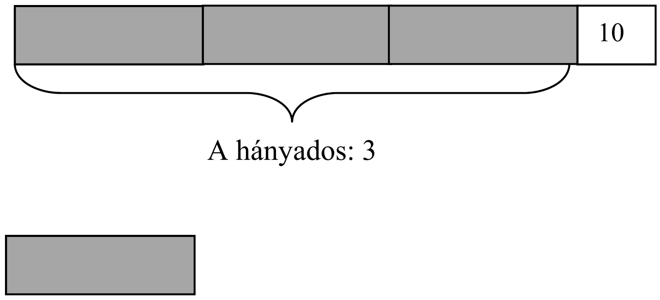
3. Adott két természetes szám. Ha a nagyobbat a kisebbel elosztjuk, a hányados 3 a maradék 10. Összeadva az osztandót az osztót, a hányadost és a maradékot, 143-at kapunk. Adjuk meg a számokat (6. ábra)!

Megoldás:

a) „*a nagyobbat a kisebbel elosztjuk, a hányados 3 a maradék 10*”

A nagyobbik szám:

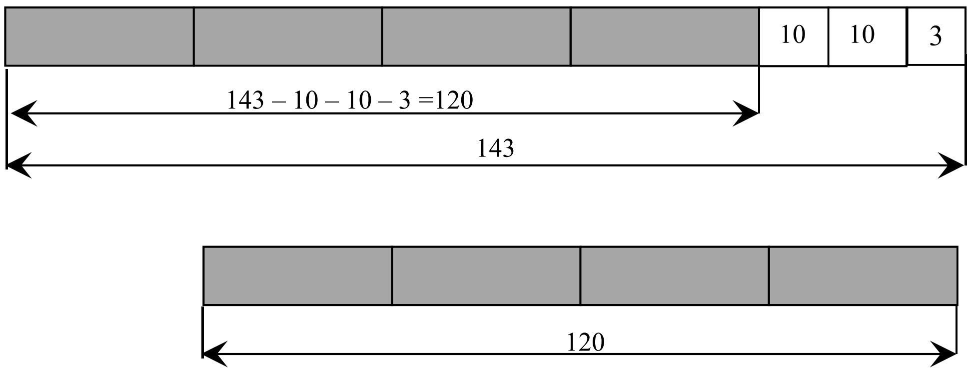
A kisebbik szám:



6. ábra

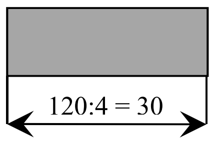
b) „*Összeadva az osztandót az osztót, a hányadost és a maradékot, 143-at kapunk*” (7. ábra).

Azaz:



7. ábra

Innen következik a kisebbik számhoz rendelt téglalap hossza (8 ábra):



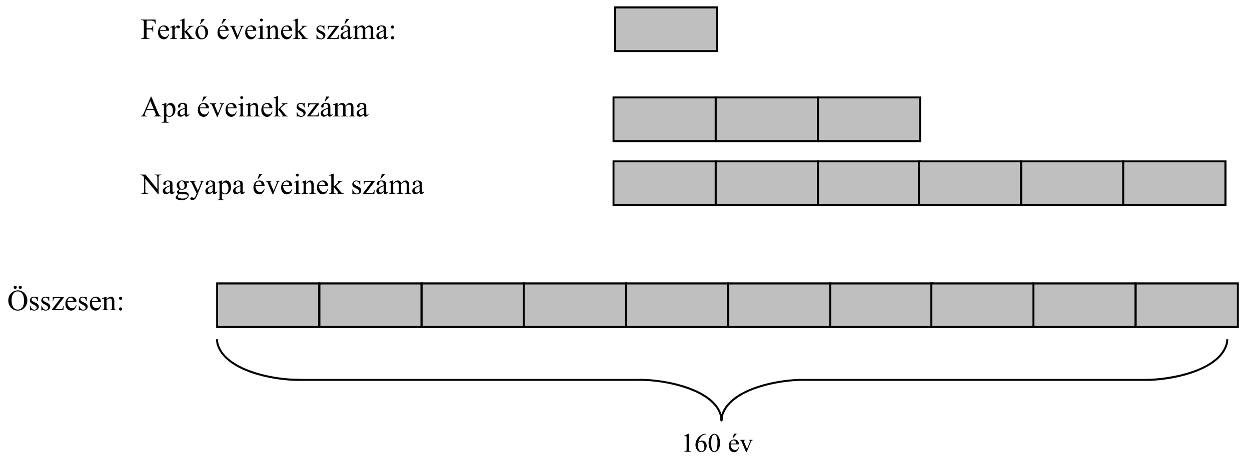
8. ábra

A kisebbik szám, az osztó értéke 30, az osztandó: $3 \cdot 30 + 10 = 100$.

Próba: 100-at 3-mal osztva a hányados 30, a maradék 10. □

4. Apa háromszor idősebb a fiánál Ferkónál, viszont a nagyapa kétszer annyi idős, mint apa. Nagyapa, apa és Ferkó életkorának összege 160. Határozzuk meg a nagyapa, az apa és Ferkó életkorát!

Megoldás (9. ábra):



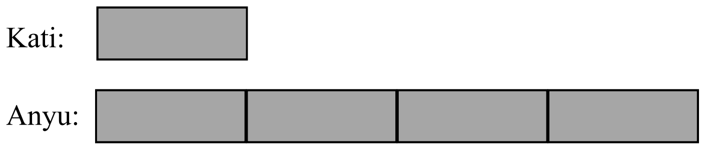
9. ábra

Megfigyeljük, hogy a 160 év 10 téglalap *hosszának felel meg*, így egy téglalap hosszának 160:10=16 év *felel meg*. Így Ferkó 16 éves, Apa 3 × 16 = 48 míg Nagyapa 2 × 48 = 96 éves.
Próba: 16 + (3 × 16) + (2×3×16) = 160.□

5. Ezelőtt két éve anyu négyszer volt idősebb Katinál, négy év múlva anyu háromszor lesz idősebb a lányánál. Hány éves anyu és hány éves Kati?

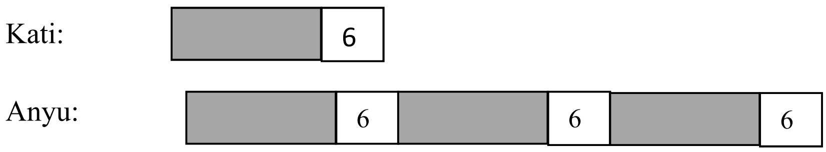
Megoldás:
A feladatot két részre bontjuk: felrajzoljuk a két évvel ezelőtti évek viszonyát, majd a jelenkori viszonyt ábrázoljuk (10 ábra).

Két éve „*Anyu négyszer volt idősebb Katinál”:*



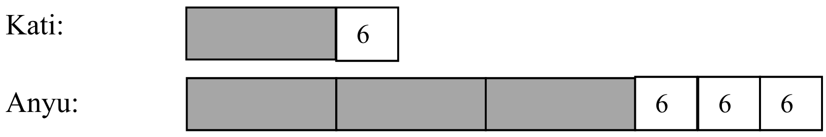
10. ábra

Négy év múlva, vagyis az előző viszonyhoz képest *eltelt hat év* (11. ábra):
„*Anyu háromszor lesz idősebb a lányánál*”.



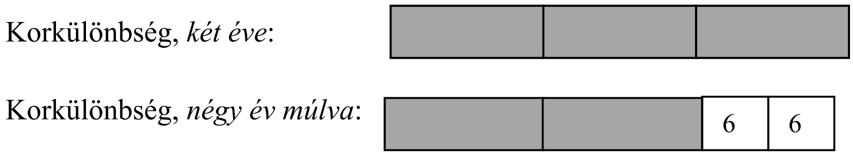
11. ábra

Átrendezve a téglalapokat, azt kapjuk, hogy (12. ábra):



12. ábra

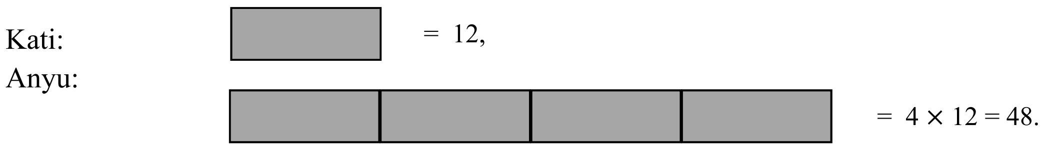
A példa megoldása szempontjából a legfontosabb kérdésre hívjuk fel a figyelmet: az évek telnek ugyan, de *Anyu és Kati között a korkülönbség nem változik*. A hat évvel ezelőtti korkülönbség és a négy év múlva fennálló korkülönbség azonos (13. ábra)!



13. ábra

Könnyen belátható, hogy egy sötét téglalap megfelel 6 + 6 = 12 évnek.

Tehát (14. ábra), két éve:



14. ábra

Most Kati éveinek száma 12+ 2 = 14, míg Anyu éveinek száma 48+2 = 50.

Próba: (50 − 2) : (14 − 2) = 4
(48 + 6) : (12 + 6) = 3.□

6. Három fiúnak összesen 46 üveggolyója van. Kendének 4-gyel van kevesebb, mint Ferinek és Gergőnek összesen. Gergőnek 5 üveggolyóval van több, mint Ferinek. Hány üveggolyója van egyenként a fiúknak?

Megoldás:
Az ábrázolás módszerével megoldott feladatok esetében igen fontos az indítás: melyik az a mondat, amelynek tartalmát először ábrázoljuk? Mi most ezzel a mondattal indítunk: „*Gergőnek 5 üveggolyóval van több, mint Ferinek*” (15. ábra).



15. ábra

A 16. ábra szerint Ferinek és Gergőnek összesen:



16. ábra

két ismeretlen hosszúságú téglalappal jelölt számú üveggolyója van és még 5.

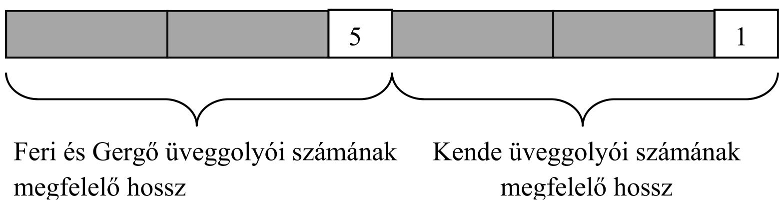
Tudjuk továbbá, hogy:
„*Kendének 4-gyel van kevesebb, mint Ferinek és Gergőnek összesen*”.

Ezek szerint Kende golyóinak ábrázolására (17. ábra) felhasználjuk azt, amit már megtudtunk Feri és Gergő golyóiról:



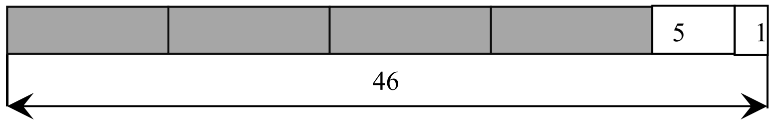
17. ábra

Megfigyeljük, hogy a fehér hátterű négyzetben szereplő szám beírásánál figyelembe vettük a „*néggyel kevesebb*” információt (5-4=1).
Most már felhasználhatjuk a feladat első mondatát is: „*Három fiúnak összesen 46 üveggolyója van*”(18. ábra).



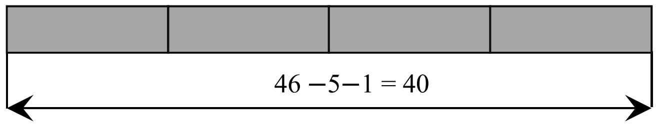
18. ábra

Átrendezve a 18. ábrát, azt kapjuk, hogy :



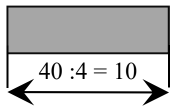
19. ábra

A 19. ábrából következik, hogy:



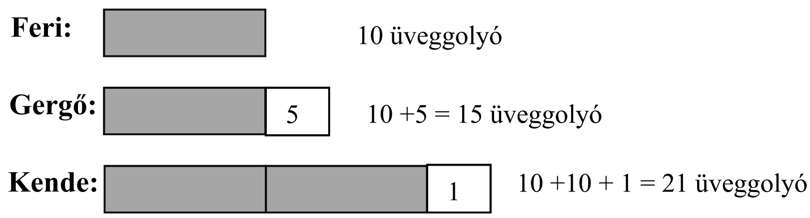
20. ábra

Megállapítjuk, hogy négy téglalap hosszának megfelelő üveggolyószám 40, így adódik, hogy:



21. ábra

Így már felírhatjuk a végső következtetéseinket:



22. ábra

Próba:

10 + 15 – 21 = 4

15 - 10 = 5

10 +15 + 21 = 46. □

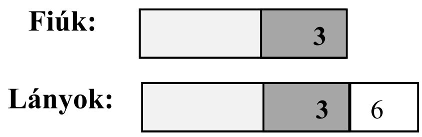
7. Egy osztályba 6-tal több lány jár, mint fiú. Amikor 3 fiú hiányzott (és egy lány sem), akkor kétszer annyi lány volt az osztályban, mint fiú. Összesen hány lány osztálytársa van az ebbe az osztályba járó Borinak?

Megoldás:
Ábrázoljuk a feladat első mondatának megfelelő helyzetet (23. ábra):



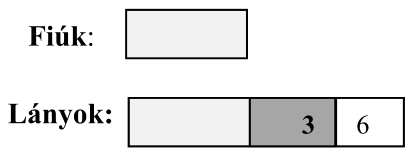
23. ábra

Most egy kis cselhez folyamodunk: a fiúk eredeti számát jelölő téglalapot átalakítjuk úgy, hogy megjelöljük azt a három fiút, akik hiányozni fognak (24. ábra).



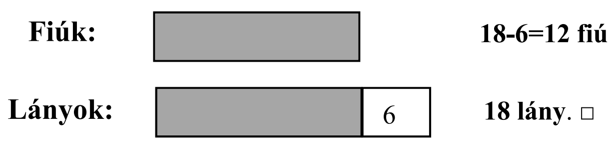
24. ábra

Figyelembe vesszük a feladat második mondatát: „*Amikor 3 fiú hiányzott (és egy lány sem), akkor kétszer annyi lány volt az osztályban, mint fiú.*”(25. ábra).



25. ábra

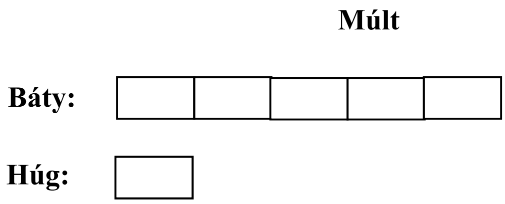
Ha kétszer annyi lány van, mint fiú, akkor a 3+6 = 9 lányt jelölő téglalap melletti téglalap, a feladat szövege szerint, szintén 9 lányt kell, hogy jelöljön. Így megállapítjuk, hogy 9 + 9 = 18 lány jár az osztályba. Borinak tehát 18−1 = 17 lány osztálytársa van.
A fiúk számát, a lányok számának ismeretében könnyen meghatározhatjuk (26. ábra) :



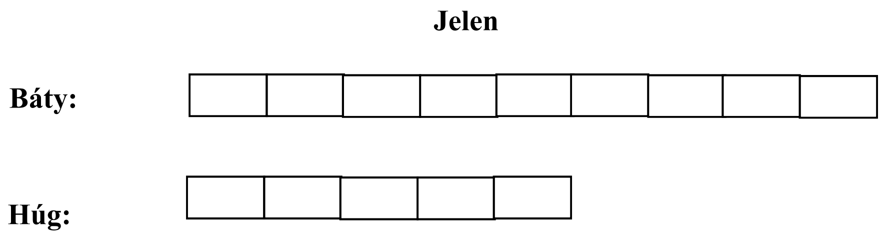
26. ábra

8. Egy lány most ötször olyan idős, mint akkor volt, mikor a bátyja olyan idős volt, mint ő most. Amikor ő annyi idős lesz, mint a bátyja most, akkor életkoruk együtt 88 év lesz. Hány éves most a lány, illetve a bátyja?

Megoldás:
A feladat nehéz, mert három idősíkban kell, hogy számoljunk: múlt, jelen és jövő. Tudjuk viszont, hogy a báty-húg korkülönbség minden idősíkban állandó.
Tekintsük a feladat első mondatát: „*Egy lány most ötször olyan idős, mint akkor volt, mikor a bátyja olyan idős volt, mint ő most.*” (27 és 28. ábra).

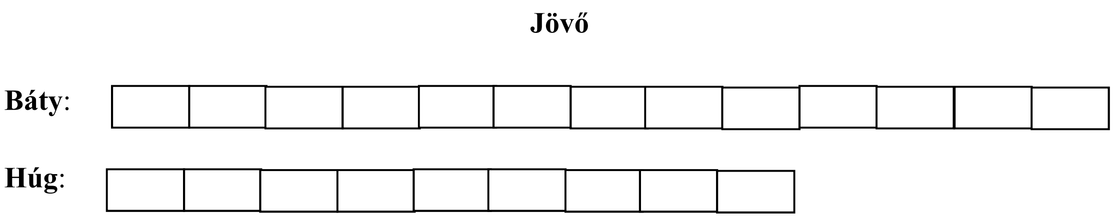


27. ábra



28. ábra

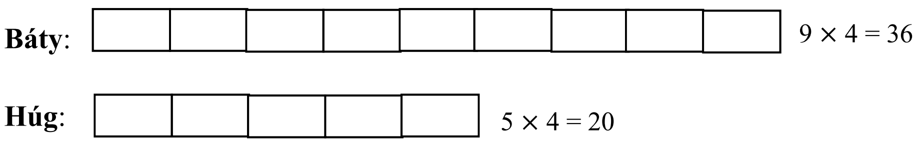
Tekintsük a feladat második mondatát: „ *Amikor ő annyi idős lesz, mint a bátyja most, akkor életkoruk együtt 88 év lesz.*”(29. ábra).



29. ábra

Megfigyeljük, hogy a korkülönbség minden esetben négy téglalap hosszának megfelelő évszám (27. ábra - 29. ábra).
Tekintsük a feladatot „megoldó” utolsó mondatot: „*Amikor ő annyi idős lesz, mint a bátyja most, akkor életkoruk együtt 88 év lesz*”. A jövő idősíkban megszámoljuk az életkorokat leíró téglalapok számát. Azt találjuk, hogy a húg életkorának kilenc téglalap felel meg, míg a báty életkorának 9+4 = 13 téglalap. Ebben az esetben a 88 évet a 13 + 9 = 22 téglalap írja le. Könnyen belátható, hogy egy téglalapnak megfelelő évek száma 88 : 22 = 4.

Jelen



30. ábra

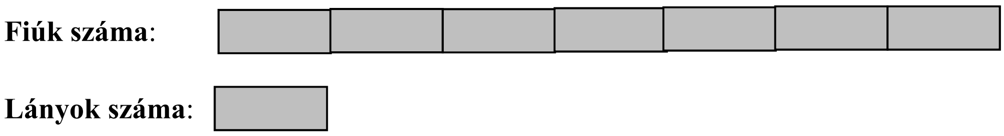
Tehát a húg *20 éves* a báty pedig *36*.□
Javasoljuk, hogy az olvasó végezze el a próbaszámításokat.

9. Egy összejövetelen négyszer annyi fiú van, mint lány. Egy adott időpontban elmegy 4 fiú és 4 lány. Így hétszer annyi fiú marad, mint lány. Hány fiú és hány lány volt eredetileg?

Megoldás:

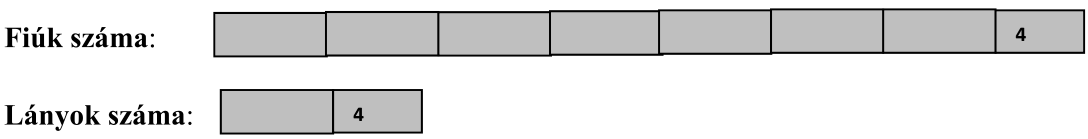
A feladat megoldása a helyes indításban rejlik. Tekintsük a második állapotot, amikor elment már a négy fiú és a négy lány:

„*...elmegy 4 fiú és 4 lány. Így hétszer annyi fiú marad, mint lány.*”(31. ábra).



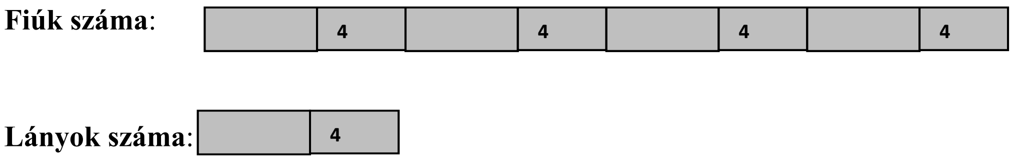
31. ábra

Ebben a pillanatban, a 4 fiú és 4 lány elmenetele után, a lányok számát a téglalap hossza jelenti, a fiúk számát hét ilyen téglalap ábrázolja.
„Vigyünk” vissza négy lány és négy fiút, így visszaáll a kezdeti állapot (32. ábra).



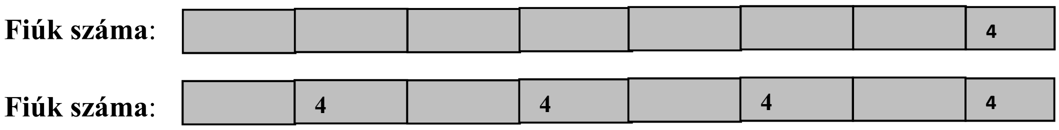
32. ábra

Ekkor a fiúk száma négyszerese a lányok számának (33. ábra).



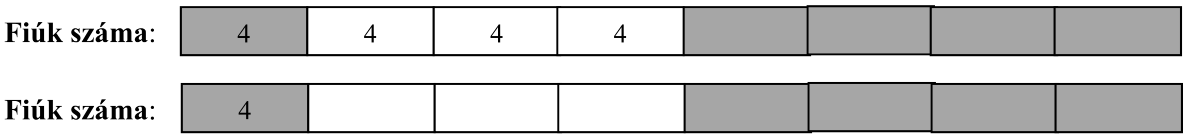
33. ábra

Könnyen belátható, hogy a fiúk száma a két utóbbi ábrán (32. ábra és 33. ábra) azonos (34. ábra).



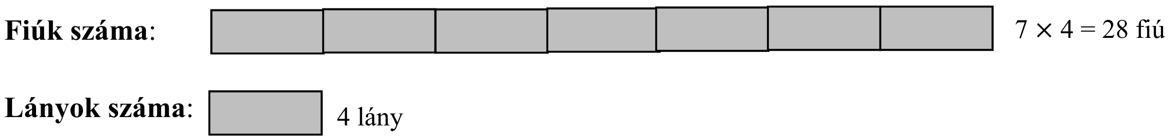
34. ábra

Az alsó sort átrendezzük (35. ábra).



35. ábra

A besötétített téglalapokat eltávolítva, észrevesszük, hogy a három megmaradt téglalap 12 fiúnak felel meg, így *egy téglalap 12:3=4 fiúnak felel meg*.
Tekintsük a 4-4 fiú illetve lány elmenetele *utáni helyzetet* (36. ábra).



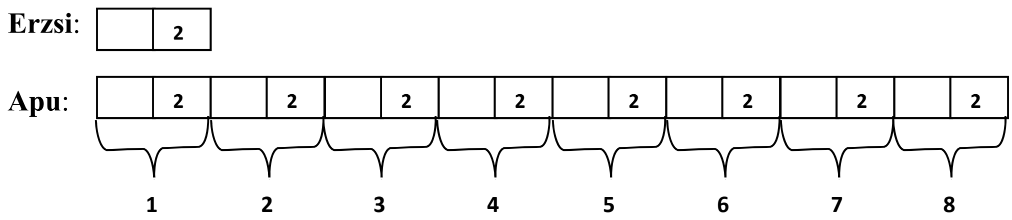
36. ábra

Az elmenetel utáni helyzet: 28 fiú és 4 lány van a teremben, tehát eredetileg 28+4=32 fiú illetve 4 + 4 = 8 lány van a teremben.
Próba: 32:8 = 4;
32 – 4 = 28;
8 – 4 = 4;
28 : 4 = 7.□

10. Erzsi, apu és nagymama együtt 90 évesek. Két év múlva apu nyolcszor idősebb lesz Erzsinél, nagymama pedig kétszer idősebb lesz, mint apu most. Hány éves Erzsi? Hány éves apu? Hát nagymama?

Megoldás: Erzsi *mostani éveinek számához* egy téglalapot rendelünk:  .

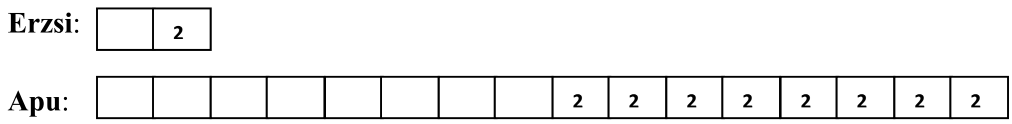
Két év múlva:



37. ábra

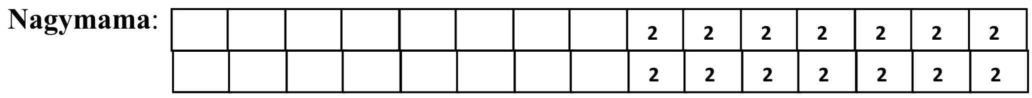
Átrendezzük az apu éveit leíró téglalapokat (38. ábra).

Két év múlva:



38. ábra

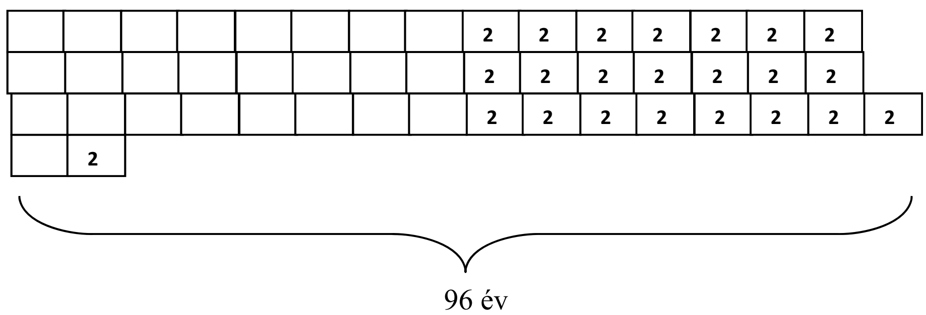
Ekkor nagymama éveinek számát a 39. ábra írja le (miután levontunk Apu jelenlegi éveinek számából 2 évet!).



39. ábra

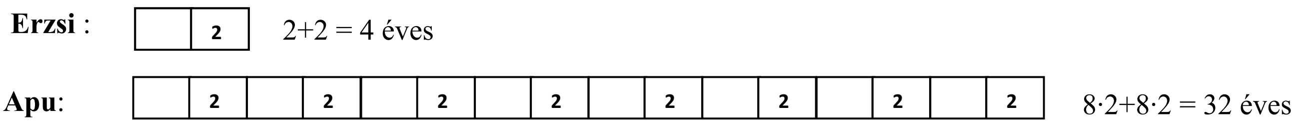
Figyelembe véve, hogy mindannyian „öregedtek" két évet, az éveik számának összege 96 (90 + 2 + 2 + 2) lesz!

Összeadva az évek számát azt kapjuk, hogy:



40. ábra

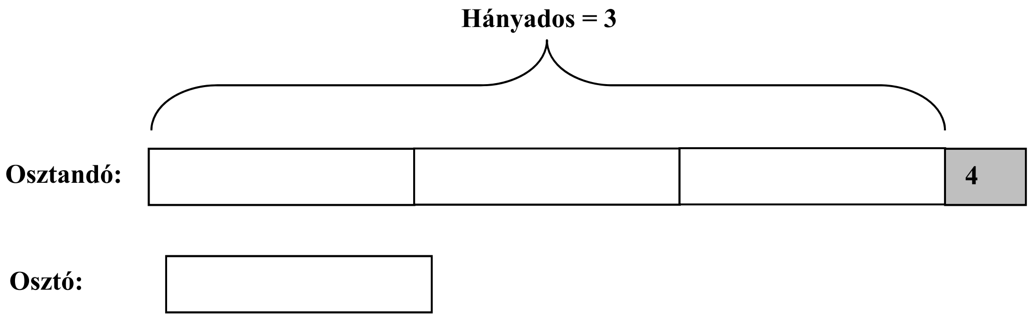
Megszámoljuk a jelöletlen téglalapokat: 25 ilyen téglalapunk van!
Összeadjuk a ketteseket a megjelölt téglalapokból: az eredmény 46!
Ekkor 96-46 = 50!
Tehát a 25 téglalap 50 évnek felel meg, így egy téglalap 50:25 = 2 évnek felel meg.
Tehát *két év* múlva az életkorok viszonyát a 41. ábra szemlélteti.



41. ábra

A szöveget újra elolvasva észrevesszük, hogy nagymama két év múlva $2 \cdot (32 - 2) = 60$ éves lesz. Most Erzsi $4 - 2 = 2$ éves, Apu $32 - 2 = 30$ éves, Nagymama $2 \cdot 30 - 2 = 58$ éves. A számítások próbáját az olvasóra bízzuk!□

11. Két szám különbsége 20, osztási hányadosuk 3, az osztás maradéka 4. Határozzuk meg a két számot!
Megoldás: Tekintsük a második mondatot: „*osztási hányadosuk 3, az osztás maradéka 4*”(42. ábra).



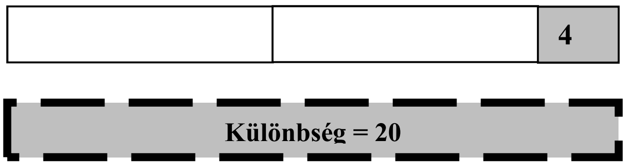
42. ábra

Következhet az első mondat (43. ábra): „*Két szám különbsége 20*”.

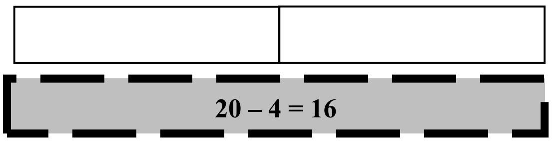


43. ábra

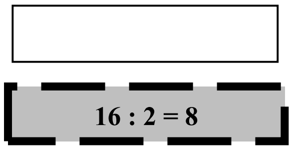
A 42. és 43. ábrákat egybevetve következik a 44. ábra.



44. ábra

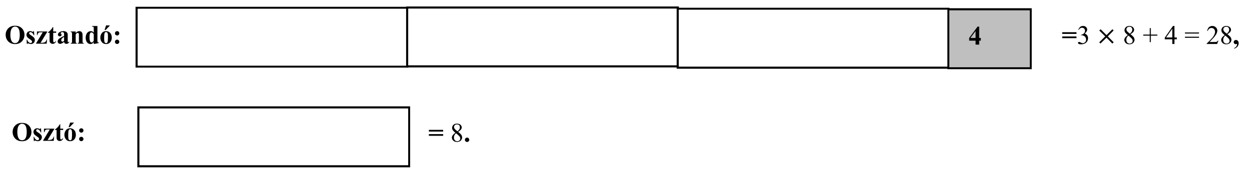


45. ábra



46. ábra

A 44., 45. és 46. ábrákból következik, hogy:



47. ábra

Próba: 28 : 3 =3, maradék 4;

28 - 8 = 20.□

KITŰZÖTT FELADATOK

SZÁMOK, ÖSSZEGEK, KÜLÖNBSÉGEK, ARÁNYOK

1. Egy számot összeadtak a negyedével, az összeg 115 lett. Melyik ez a szám?

2. Két szám osztási hányadosa 3, a maradék 10. Ha az osztandót, az osztót, a hányadost és a maradékot összeadjuk, az összeg 143. Melyik az a két szám?

3. Három szám összege 1002. Az első két szám összege a harmadik duplája, A két szám különbsége a harmadik számmal egyenlő. Melyik a három szám?

4. Két szám közül az egyik 36-tal nagyobb, mint a másik. A két szám összegét a különbségükkel elosztva a hányados 35, a maradék 34. Határozzuk meg a két számot!

5. Három szám összege 1359. Ha az elsőből 174-et, a másodikból 35-öt, a harmadikból 187-et vonnak ki, a különbségek egyenlők lesznek. Melyik a három szám?

6. Három szám összege 1990. Határozzuk meg a számokat, tudva, hogy ha a másodikat az elsővel elosztjuk 3-at kapunk, ha a harmadikat osztjuk el a másodikkal, a hányados 2, a maradék 110!

7. Két szám különbsége 226, ha az elsőt 2-vel növeljük, a második nyolcada lesz. Melyek ezek a számok?

8. Négy egymásután következő páros szám számtani közepe 2005. Adjuk meg a négy számot!

9. Három sorba rendezett szám összege 54. A középső szám a két szélső szám összegének a fele. A legkisebb szám 28-cal kisebb, mint a második és harmadik összege. Adjuk meg a három számot!

10. Keressük meg azt a két számot, melyek közül az első a második harmada, a második fele pedig 7-tel nagyobb az elsőnél!

11. Ha két szám összeget a hatszorosára növeljük, eredményként a 438-at kapjuk. A két szám különbsége 21. Határozzuk meg a két számot!

12. Két szám hányadosa 2, a különbségük szintén 2. Adjuk meg a számokat!

13. Egy szám fele negyedének a fele 3. Melyik ez a szám?

14. Két szám összege 69, az osztási hányadosuk 7, az osztás maradéka 5. Határozzuk meg a két számot!

15. Két szám összege 148. Az osztási hányadosuk 2, a maradék 4. Határozzuk meg a két számot!

16. Adott három, egymásután következő természetes szám. Adjuk meg ezt a három számot, ha tudjuk, hogy az első számból 6-ot kivonva egy olyan számot kapunk, amelyik a harmadik szám felénél 6-tal nagyobb!

17. Két szám összege 36, különbségük 16. Melyik ez a két szám?

18. Két szám összege 240. Ha az egyiket elosztjuk a másikkal, a hányados 4, a maradék 20. Melyik ez a két szám?

19. Bontsuk fel a 72-t négy összeadandóra úgy, hogy ha az első számhoz hozzáadunk 5-öt, a második számból elveszünk 5-öt, a harmadikat megszorozzuk öttel, a negyediket elosztjuk öttel, akkor ugyanazt a számot kapjuk!

20. Három természetes szám összege 1999. Határozzuk meg a számokat, tudva hogy az első szám 43-mal kisebb a második szám felénél, a harmadik pedig 87-tel nagyobb az első kettő különbségénél!

21. Két természetes szám különbsége 46. Ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkora hányados 5 és a maradék 2. Határozzuk meg a számokat!

22. Két természetes szám összege 70. Az első szám 18-cal nagyobb, mint a második számháromszorosa. Határozzátok meg a számokat!

23. Négy egymásután következő szám kétszerese 698. Határozzuk meg a négy számot!

24. Négy szám összege 162. Adjuk meg a számokat, ha tudjuk, hogy az első két szám egymásután következő számok, míg az első és utolsó szám összege 21!

25. Hat egymásután következő szám összege 159. Adjuk meg a számokat!

26. Három természetes szám összege 72. Az első szám 15-tel kisebb, mint a második kétszerese, és 18-cal nagyobb, mint a harmadik. Határozzátok meg a számokat!

27. Két szám különbsége 56 és összege 104. Határozzátok meg a számokat!

28. Három természetes szám összege 1116. Az első számot a másodikkal osztva a hányados 5, ha a harmadik számot a második számmal osztjuk, a hányados 4, a maradék 16. Számoljuk ki a három számot!

29. Két szám különbsége 335. Az első számot a másodikkal elosztva a hányados 12, a maradék 5. Határozzuk meg a számokat!

30. Három szám összege 454. Mindenik számot ugyanannyival növeljük, így az első szám 397, a második szám 108 és a harmadik szám 222. Adjuk meg az eredeti számokat!

31. Egy természetes szám 9-cel való osztási maradéka 0. A szám és a 9-cel való osztási hányados 890. Add meg a számot!

32. Három szám számtani középarányosa 13. Az első és a harmadik szám számtani középarányosa 12. Az első szám kétszer nagyobb, mint a harmadik. Mindezek ismeretében határozzuk meg a három számot!

33. Egy osztás során azt tapasztaljuk, hogy az osztó a maradék és a hányados egymásután következő természetes számok, összegük pedig 30. Adjuk meg az osztást!

34. Két számról a következőket tudjuk: összegük négyszer nagyobb a különbségüknél, összegük és különbségük összege pontosan 200. Határozzuk meg a két számot!

35. Dani egy 51 embert számláló sorban van. Megfigyelte, hogy a háta mögött állók száma a negyede az előtte állók számának. Hányan állnak Dani előtt?

36. Egy szám kétszerese egy másik szám háromszorosa. Adjuk meg a két számot, ha tudjuk, hogy a különbségük 9!

37. Fiúkat és lányokat sorba állítunk a következőképpen: a sor két végére egy-egy fiút, a sorban végig két fiú után három lány következik. Tudjuk, hogy 37-tel több lány van, mint fiú. Hány fiú és hány lány van a sorban?

38. Meghatározandóak az a, b, c, d, és e természetes számok. A számokról a következőket tudjuk:
    a. Az a szám a b-nek kétszerese.
    b. A c szám 40-nel kisebb a d-nél és 25-tel kisebb a b-nél.
    c. A d szám az e háromszorosa.
    d. $a + b + c + d + e = 987$

ÉVEK SZÁMA, KORKÜLÖNBSÉG

1. Peti és Anna éveinek számáról a következőket tudjuk: öt év múlva Peti háromszor idősebb lesz a közöttük levő korkülönbség háromszorosánál. A kettőjük közötti korkülönbség szám szerint egyenlő az Anna két évvel, ezelőtti korával. Hány éves Anna? Hány éves Peti?

2. Anya és Anna együtt 40 évesek. Anyu négyszer idősebb Annánál. Hány év múlva lesz anyu kétszer idősebb Annánál?

3. Csabi és Csilla testvérek. Tudjuk, hogy öt év múlva Csabi éveinek száma a háromszorosa lesz a közöttük levő korkülönbségnek. A két gyerek közötti korkülönbség megegyezik Csilla két évvel ezelőtti számával. Hány éves Csabi? Hát Csilla?

4. Anna és Panna testvérek. Ezelőtt három évvel Anna éveinek száma háromszorosa volt a kettejük közötti korkülönbségnek. Öt év múlva a két gyerek éveinek száma a Panna mostani évei számának a háromszorosa lesz. Hány éves Anna? Hát Panna?

5. Bori most háromszor annyi éves, mint Dóri. Négy év múlva már csak kétszer annyi éves lesz, mint Dóri akkori életkora. Hány éves lesz négy év múlva Bori?

6. Most apám 61 éves, én 40 éves vagyok. Hány évvel ezelőtt volt apám nyolcszor idősebb nálam?

7. Anna, Niki és Gizi együtt 133 feladatot oldottak meg. Anna 21-gyel többet oldott meg, mint Niki és 13-mal kevesebbet, mint Gizi. Hány feladatot oldottak meg a gyerekek egyenként?

8. Három év múlva az apa életkora hatszorosa lesz a fia életkorának, 23 év múlva az apa életkora kétszerese lesz a fia korának. Hány éves az apa? Hát a fiú?

9. Az anya 30 éves a fia 7 éves. Hány év múlva lesz az anya kétszer annyi idős, mint a fia?

10. Egy anya ötször idősebb a lányánál. Két évvel ezelőtt hatszor volt idősebb, mint a lánya. Hány éves az anya és hány éves a lánya?

11. Öcsit megkérdezték, hogy hány éves? Öcsi egy bonyolult lélek, tehát a következőket válaszolta: „*Három kisebb testvérem van. Közülük a legnagyobb éveinek száma hárommal haladja meg az én éveim számának a felét. A húgom kilenc éves. A harmadik testvérem éveinek száma pontosan egy hatoda az én életkoromnak. Ha a nagyobbik fiútestvérem éveinek számát összeadja a kisebbik fiútestvérem éveinek számával és levonja belőle a húgom életkorát, akkor eredményként megkapja az én életkoromat* ”. Nos, hány éves Öcsi?

12. Egy apa 47 éves, a fia 23 éves. Hány évvel ezelőtt volt az apa ötször idősebb a fiánál?

13. Ha egy fiú két évvel idősebb lenne, akkor életkora harmada lenne az apáénak. Ha az apa 4 évvel idősebb lenne, akkor az apa és a fia életkorának aránya 4:1 lenne. Határozzuk meg az apa és a fiú életkorát!

14. A hajó és a kapitány együtt hetven éves. Hány éves a kapitány, ha a hajó most kétszer olyan idős, mint a kapitány volt akkor, amikor a hajó annyi idős volt, mint most a kapitány?

15. Hat évvel ezelőtt Beáta édesapja és édesanyja életkorának különbsége egyenlő volt az ő életkorával. Jelenleg az édesanyja háromszor idősebb a lányánál Az édesapa 34 éves. Hány éves Beáta? Hát az édesanyja?

16. Három évvel ezelőtt Bea és Bori együtt 15 évesek voltak. Most mennyi éveiknek száma összesen?

17. Józsi nagybátyja háromszor idősebb Józsinál. Négy éve a nagybácsi négyszer idősebb volt Józsinál. Hány éves Józsi most? Hát a nagybácsi?

18. Egy apa, akinek 3 gyermeke van, a gyermekei életkoráról ezt mondta: ha az életkorokat összeszorzom, 36-ot kapok, ha az életkorokat összeadom, 13-at kapok. Hány évesek lehetnek a gyerekek?

19. Ilona most háromszor idősebb, mint ezelőtt harminc éve. Hány éves most Ilona?

20. Karcsi 9 évvel idősebb, mint Előd, életkoruk aránya 5:2. Hány évesek a fiúk?

21. Botond testvére Enikő. Amikor megkérdezték Botondot, hogy hány évesek, így válaszolt: „*Ha a húgom annyi idős lesz, mint én vagyok most, akkor együtt 35 évesek leszünk. Most én háromszor annyi idős vagyok, mint a húgom volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint a húgom most*.” Hány évesek a testvérek?

22. Egy apa éveinek száma néggyel nagyobb, mint az anya és a fiúgyermek évei számának összege. Kilenc év múlva a fiúgyermek éveinek száma egyharmada lesz az anya éveinek számával, és akkor mindhármuk éveinek száma 115 lesz. Hány évesek most egyenként?

23. Egy anya életkora 28 évvel nagyobb, mint a lánya életkora. 6 év múlva életkoruk összege 60 év lesz. Hány évesek most?

24. Mari azt mondja: „*Hét év múlva életkorom a háromszorosa lesz az öt évvel ezelőtti életkoromnak.*”. Hány éves Mari?

25. Az apa 28 évvel idősebb a fiánál, így pontosan ötször idősebb, mint a fia. Hány év múlva lesz az apa háromszor idősebb a fiánál?

VEGYES FELADATOK

1. Teri kölcsönzött Ferinek 860 krajcárt. Teri a kölcsönt a következőképpen ejtette meg: a második nap 50 krajcárral többet adott az első napi összeg kétszeresénél. Számoljuk ki mekkora összegeket kapott Feri az egyes napokon?

2. Anna, Bella és Csilla ugyanazt a könyvet olvassák, amely közmondásokat tartalmaz. Anna elolvasta az egész könyvet, Bella a felét, míg Csilla a negyedét. Összesen 196 közmondást olvastak el. Hány közmondás van a könyvben?

3. Józsi az üzleteket járva felsóhajtott: „*Ha négyszer annyi pénzem lenne, mint amennyi most van, akkor vagyonom pontosan annyival haladná meg az 1000 krajcárt, mint amennyi most hiányzik ahhoz, hogy 1000 krajcárom legyen*." Hány krajcárja van most Józsinak?

4. Polükratesz, Szirakuza türannosza megkérdezte Püthagoraszt: „Hányan járnak az iskoládba?" mire Püthagorasz azt válaszolta: „*A tanulók fele matematikát tanul, további negyedük zenét, további hetedük csak hallgat, és rajtuk kívül van még három nő is!*". Hányan látogatják Püthagorasz iskoláját?

5. Andrásnak, Bálintnak és Cecíliának összesen 360 bélyege van. Ha András adna 15-öt Bálintnak és 35-öt Cecíliának, akkor Andrásnak háromszor kevesebb lenne, mint Cecíliának, és kétszer kevesebb, mint Bálintnak. Kinek hány bélyege van?

6. Ha egy számhoz hozzáadjuk a 2/3-át és az így kapott számból kivonjuk az összeg 1/3- át, akkor 10-et kapunk. Melyik ez a szám?

7. Három fán 60 madár ül. Az első fáról elrepül 6 madár, a másodikról 8 madár, míg a harmadikról 4 madár. Így minden fán ugyanannyi madár ül. Hány madár ült az egyes fákon?

8. Egy gyereknek 100 darabnál annyival kevesebb diója van, mint amennyivel több lenne, ha most 9-szer több diója lenne. Hány diója van a gyereknek? Karcsi most kétszer olyan idős, mint Feri. Négy évvel ezelőtt Karcsi háromszor olyan idős volt, mint Feri. Hány évesek most?

9. Két gyereknek összesen 600 leje van. Ha az első gyerek a másodikénak dupláját költi, mindkettőjüknek 150 – 150 leje marad. Hány lejük volt eredetileg külön-külön?

10. Egy csoport ember gyógynövényeket gyűjt. Három csoportban dolgoznak. Az első csoport 2 kg-mal gyűjtött többet, mint a második, a második 1 kg-mal kevesebbet, mint a harmadik. Az utolsó két csoport együtt 21 kg-ot gyűjtött. Hány kg gyógynövényt gyűjtöttek összesen?

11. Három tanulónak összesen 891 leje van. Az elsőnek négyszer annyi, mint a másodiknak, a harmadiknak 90 lejjel több, mint az elsőnek. Hány lejük van külön-külön?

12. Egy tó szélén a víz mélysége 70 cm. Ide cölöpöt vernek le, a csónakok kikötéséhez. A cölöp 3/5-e mélyül az iszapba, 1/5-e kilátszik a vízből. Milyen hosszú a cölöp?

13. Négy embernek 1660 leje van. Hány lejük van külön-külön, ha az első pénzének 2/9-e 20 lejjel több, mint a második pénzének 2/7-e, 40 lejjel több, mint a harmadik pénzének 2/5-e és 60 lejjel több, mint a negyedik pénzének 2/3-a?

14. Egy újítás elkészítésében 3 mérnök, 2 technikus és 1 munkás vett részt. Az újításért 22 milliót kaptak. Számítsuk ki, hogy melyik hány lejt kapott, ha tudjuk, hogy a mérnök háromszorosát a munkásénak, a munkás pedig kétszeresét a technikusénak!

15. Öt család egy kirándulásra indulva költőpénznek rendre a következő összegeket viszi: 900 lej, 1200 lej, 1150 lej, 1400 lej és 1000 lej. Minden család ugyanannyit költ, és a hazatérésnél megállapítják, hogy összesen 1400 lejük maradt. Hány lejt költöttek családonként és melyik családnak mennyi pénze maradt?

16. Zolinak 35 leje van, Istvánnak 8 leje. Mindenik kap naponta 1-1 lejt. Hány nap múlva lesz Zolinak kétszer annyi pénze, mint Istvánnak?

17. Három ládában összesen 90 alma van. Ha a második ládából átteszünk 3 almát az elsőbe, akkor ott 4 almával lesz több, mint a második ládában. Ha a második ládából átteszünk 5 almát a harmadik ládába, akkor a második ládában 15 almával lesz több, mint a harmadik ládában. Számítsuk ki, hány alma van az egyes ládákban!

18. Két tartály közül az egyikben 80 l víz, a másikban 350 l víz van. Percenként 5 l vizet töltünk mindenikbe. Hány perc múlva lesz a második tartályban háromszor annyi, mint az elsőben?

19. Egy négyzet alakú szoba padlóját négyzet alakú burkolólapokkal fedetik be úgy, hogy egyetlen lapot se kelljen elvágni. A csempés először a szélén körben rakta le a lapokat egysorosan és ehhez 56 lapot használt fel. Hány darab lap kell az egész padló burkolásához?

20. Ha egy négyzet oldalhosszát 4 cm-rel növeljük, akkor a négyzet kerülete az eredeti kerület háromszorosára nő. Adjuk meg az eredeti négyzet oldalhosszát!

21. Anninak és Panninak 18 ceruzája van. Ha Anni adna két ceruzát Panninak, akkor egyenlő számú ceruzájuk lenne. Hány ceruzájuk van a lányoknak külön – külön.

22. Három kosár almából összesen 296 kg almát adtak el. Az első kettőből ugyanakkor mennyiséget adtak el, a harmadikból pedig 28 kg-mal többet, mint az első kettőből összesen. Hány kg almát adtak el a kosarakból külön-külön?

23. Három személynek összesen 850 piculája van. Ha mindegyik személy ugyanannyit költene, akkor az elsőnek 280, a másodiknak 150, a harmadiknak pedig 45 piculája maradna. Mennyi pénzük volt eredetileg külön-külön?

24. Egy virágüzletbe 240 szál virágot hoztak. Háromszor több rózsát hoztak, mint liliomot és 8 szállal kevesebb szegfűt, mint rózsát és liliomot összesen. Hány virágot hoztak az üzletbe külön-külön?

25. Három polcon 144 könyv van. Ha az első polcról 15 könyvet átteszünk a második polcra, akkor egyenlő számú könyv lesz a két polcon, amely szám fele a harmadik polcon levő könyvek számának. Hány könyv volt eredetileg a polcokon?

26. Három osztályban összesen 84 tanuló van. Ha az első osztályból elmenne 5 tanuló és a harmadik osztályba 2 tanuló jönne, akkor mindenik osztályban ugyanannyi tanuló lenne. Hány tanuló volt az osztályokban eredetileg?

27. Anni 26 feladatot oldott meg, Panni 6 feladatot. Mostantól kezdve mindketten két-két feladatot oldanak meg naponta.. Hány nap múlva lesz Anninak kétszer annyi megoldott feladata, mint Panninak?

28. Egy turistaházban három személy a szállásért összesen 45000 lejt fizetett. Az első 2, a második 3, a harmadik 4 éjszakát aludt a turistaházban. Hogyan oszlik a fizetség?

29. Egy negyed nap harmadának a felében hány óra van?

30. *Euler (1707 – 1783) feladata*. Egy apa 1600 koronát hagyott három fiára. A végrendeletében meghagyta, hogy a legidősebb fia jussa 200 koronával több legyen a középsőénél; a középsőé pedig 100 koronával több legyen, mint a legfiatalabbé. Számítsd ki mindegyikük részét!

31. Két osztályban 62 tanuló van. Amennyiben az első osztályból átiratkozna három tanuló a második osztályba, úgy a két osztályban ugyanannyi tanuló lenne. Hányan vannak most az egyes osztályokban?

32. Két osztályban 47 tanuló van. Amennyiben két tanuló a második osztályból átmegy az elsőbe, úgy a két osztály létszámának különbsége 1 fő lesz. Hányan vannak most az egyes osztályokban?

33. Egy tanuló egy 110 oldalas regényt négy nap alatt olvasott el úgy, hogy minden nap egy oldallal többet olvasott, mint az előző napon. Hány oldalt olvasott naponként a tanuló?

34. Egy kosárban most ötször annyi barack van, mint alma. Ha kivennénk 14 barackot és betennénk a kosárba még két almát, akkor a kosárban háromszor annyi barack lenne, mint alma. Hány barack és hány alma van most a kosárban?

35. Egy szám negyede felének a harmada 4. Adjuk meg a számot!

36. Két azonos hosszúságú, hengerbe csavart, ragasztószalagunk van. Miután az első hengerről letekertünk 36 centimétert, illetve a másodikról 50 centimétert, az első hengeren kétszer annyi ragasztószalag maradt, mint a második hengeren. Milyen hosszú ragasztószalag volt kezdetben egy hengeren?

37. Két természetes szám összege 79, a hányadosuk 8. Mekkora a két szám osztási maradéka?

38. Két vázában összesen 36 rózsa van. Ha áttennénk az első vázából a másodikba 2 rózsát, akkor a második vázában háromszor annyi rózsa lenne, mint az első vázában. Hány rózsa van az egyes vázákban?

39. Andrásnak és Bélának összesen 156 kitűzője van. Hány kitűzőjük van külön-külön, ha Andrásnak 48 kitűzővel több van, mint Bélának?

40. Anna és Bogi együtt 93 kg, Anna és Cili együtt 95 kg. Anna 3 kg-mal súlyosabb, mint Bogi. Mennyi a lányok tömege külön-külön?

41. Két kosárban összesen 44 alma van. Az első kosárból átteszünk a második kosárba 7 almát, így most a második kosárban 5-tel több alma van, mint az első kosár almái számának kétszerese. Eredetileg hány alma volt az egyes kosarakban?

42. Két dobozban csoki bonbont tartok, összesen 45-öt. Miután az egyikből elfogyasztottam 5 csoki bonbont, a másodikból meg 10-et, a két doboz tartalma azonos lett. Eredetileg mennyi csoki bonbon volt az egyes dobozokban?

43. Az udvaron egy osztály tanulói játszanak. Ha a fiúk negyede elhagyja az udvart, úgy ott 24 diák marad. Amennyiben a lányok negyede megy be az osztályba, az udvaron 25 diák marad. Hány fiú és hány lány volt eredetileg az udvaron?

44. 24 komancs indiánsorban haladnak. Kék Szellő a hetedik, Tarka Sólyom az utolsó a sorban. Hány komancs van Kék Szellő és Tarka Sólyom között?

45. Anikó és Ferkó egy-egy csokor virágot kapott, Anikó 22 szállal többet. Anikó 3 szál virágot Ferióknak ad. Most mennyivel van több virágszála Anikónak?

46. Egy számot 12-vel növelve egy másik szám háromszorosát kapjuk. A két szám különbsége 40. Határozzuk meg ezt a két számot!

47. Két szám összege 64, osztási hányadosuk 3, a maradék 4. Melyik ez a két szám?

48. Két szám összege 196. Adjuk meg a két számot, ha tudjuk azt, hogy az egyik szám 32-vel nagyobb a másik háromszorosánál!

49. Anninak, Panninak és Fanninak együtt 846 bélyege van. Panninak néggyel több van, mint Anninak és kétszer több mint Fanninak. Hány bélyegük van külön-külön?

50. Két szám összege 170. Ha az első számhoz 12-t adunk, és a nagyobb számból levonunk 10-et úgy két egyenlő számot kapunk. Melyek voltak az eredeti számok?

51. Egy könyvtár három polcán 478 könyv van. A második polcon 50-nel kevesebb könyv van, mint az első polcon, és kétszer kevesebb könyv, mint a harmadik polcon. Hány könyv van az egyes polcokon?

52. Az iskola három osztályában 105 gyerek van beiratkozva. Ha az első osztályból 3 gyerek átmenne a második osztályba és egy gyerek a harmadik osztályba, akkor az osztályok létszáma egyenlő lenne. Hány gyerek jár az egyes osztályokba?

53. Ferinek 7-szer több bélyege van, mint Sanyinak. Ha Feri 18 bélyeget adna Sanyinak, akkor egyenlő számú bélyegük lenne. Hány bélyegük van a gyerekeknek?

54. Három szám összege 717. A második 3-szor nagyobb, mint az első, és 10-zel kisebb, mint a harmadik. Határozzuk meg a számokat!

55. Két szám összege 64. A nagyobbikat a kisebbikkel elosztva a hányados 3 a maradék 4. Adjuk meg a két számot.

56. Anninak 7-szer annyi bélyege van, mint Panninak. Ha Anni ad Panninak 18 bélyeget, akkor azonos számú bélyegük lesz. Hány bélyegük van egyenként a gyerekeknek

57. Három szám összege 717. A második háromszor nagyobb, mint az első, és 10-zel kisebb a harmadiknál. Melyik ez a három szám?

58. Hat évvel ezelőtt Beáta édesapja és édesanyja életkorának különbsége egyenlő volt az ő életkorával. Jelenleg az édesanyja háromszor idősebb a lányánál Az édesapa 34 éves. Hány éves Beáta? Hát az édesanyja?

59. Mihály háromszor több feladatot oldott, mint Anna. Ha Mihály 4 feladattal többet oldott volna meg, akkor 22 megoldott feladata lenne. Hány feladatot oldott meg Anna?

60. Egy iskolában három harmadik osztályba összesen 105 gyerek jár. Ha az elsőből a másodikba átiratkozik 3 gyerek, és az elsőből a harmadik osztályba egy gyerek iratkozik át, akkor azonos számú gyerek lesz az egyes osztályokban beíratva. Hány gyerek van beírva most az egyes osztályokba?

61. Határozzuk meg azt az öt számot, amelyekről a következőket tudjuk:
    a. az első a második kétszerese,
    b. a második 54-gyel nagyobb, mint a harmadik,
    c. a harmadik 60-nal kisebb, mint a negyedik,
    d. a negyedik háromszor nagyobb, mint az ötödik,
    e. a negyedik és ötödik szám összege 1080.

2. FEJEZET

HIPOTÉZISEK MÓDSZERE

Első megközelítésben feltételezzük, hogy a keresett számú tanulóból, kacsából, bankjegyből, stb. egy adott *n* szám áll a rendelkezésre. Elvégezzük az ellenőrző számításokat, amely általában egy adott *k* nagyságú hibát jelez (feltételezve, hogy nem találtuk ki a keresett *n* számot). Általában eggyel növeljük a keresett számot, azaz *n* helyett *n+1*-t veszünk, újra elvégezzük az ellenőrző számításokat és megvizsgáljuk, hogy a hiba, a számított *k* értéke, mennyivel nőtt vagy csökkent. A hiba változásából következtetünk az *n* érték szükséges változásaira.

MEGOLDOTT FELADATOK

1. Egy osztály tanulóit, ha kettesével ültetjük a padokba, akkor egy üres padunk marad. Ha hárman ülnek a padokba, akkor 7 pad üresen marad. Hány tanuló és hány pad van az osztályban?
   Megoldás:
   Feltételezzük, hogy 10 padunk van az osztályban.
   Tekintsük a következő táblázatot:

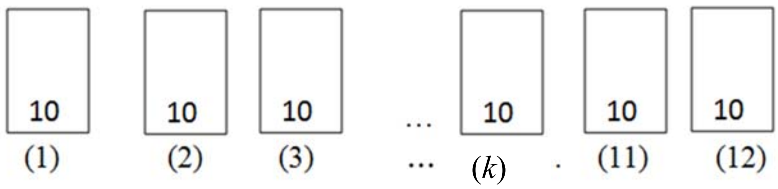
1. *táblázat*

Nr.	Padok **feltételezett** száma	Kettesével ültetünk	Hármasával ültetünk	Hiba
1.	**10**	Gyerekek száma: 9 × 2=**18** Egy pad üresen maradt.	Gyerekek száma: 3 × 3 = **9** 10 – 3 = 7 Hét pad üresen maradt	18 – 9 = **9**
2.	**11**	Gyerekek száma: 10 × 2 = **20** Egy pad üresen maradt	Gyerekek száma: 4 × 3 = 12 11 – 4 = 7 Hét pad üresen maradt	20 – 12 = **8**
Észrevesszük, hogy amennyiben *a padok száma egy egységgel nőtt, a hiba is egy egységgel csökkent*. Észrevesszük továbbá, hogy 8 egységgel kellene csökkennie a hibának, így természetes, hogy a gyerekek számának is 8 egységgel kellene növekednie.				
	11 + 8 = 19	Gyerekek száma: 18 × 2=36 Egy pad üresen maradt.	Gyerekek száma: 12 × 3 = 36 Hét pad üresen maradt	36 – 36 = 0

Tehát: a gyerekek száma 36, a padok száma 19.
Próba: 36 : 2 = 18
19 –18 =1
36 : 3 = 12
19 – 12 = 7.□

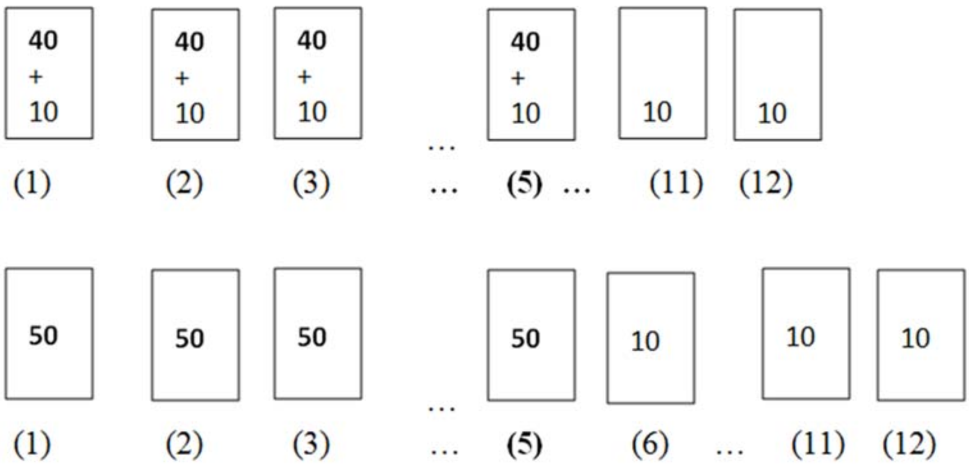
2. Egy személy 320 lejt fizetett 50 és 10 lejes bankjegyekkel. Hány 50-es és hány 10-es bankjegyet használt, ha összesen 12 bankjeggyel fizetett?

   Megoldás:
   Feltételezzük, hogy 12 darab 10 lejes bankjeggyel fizettünk. Ebben az esetben 12 ×10 = 120 (1. ábra).



1. ábra

Még 320 – 120 =200 lejünk maradt, amit ki kell fizetnünk, 50 lejes címletekben, azaz a kifizetett 10 lejes címletek egy részét “*feljavítjuk*” 50 lejes címletekre úgy, hogy a 10-es értékhez hozzáadunk még 40-t. Miután 200 lejünk maradt kifizetetlen, 200:40=5, tehát 5 címletet feljavítanunk 10-ről 50-re.



2. ábra

Az ábrából is látható, hogy 5 címletünk 50-es és 12 – 5 = 7 címletünk 10-es.
Próba: 5 · 50 + 7 · 10 = 250 + 70 = 320.□

3. Egy tanuló 17 kérdésre válaszolt. Minden jó válaszra 8 pontot kapott, a hibás válaszokra 2 pontot veszített. Hány kérdésre válaszolt helyesen, ha összesen 116 pontot gyűjtött?
Megoldás:
Feltételezzük, hogy a diáknak minden válasza helyes volt.

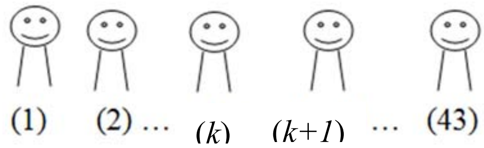
Tekintsük a következő táblázatot:

***2.** táblázat*

Nr.	Jó válaszok *feltételezett* száma	Rossz válaszok száma	Pontszám	Hiba
1	17	0	17 × 8 = 136	136−116 = 20
2	16	1	16 × 8 −1 × 2= 126	126 – 116 = 10
Észrevesszük, *hogy ha egy egységgel csökkentjük a jó válaszok számát, a hiba tíz egységgel csökken*. Így, ha még egy egységgel csökkentjük a jó válaszok számát, akkor a hiba nulla kell legyen.				
3	15	2	15 × 8 - 2×2=116	116 – 116 = 0

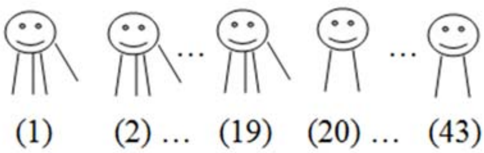
Tehát a jó válaszok száma 15, a rossz válaszok száma 2.
Próba: 15·8-2·2=116. □

4. Egy udvaron tyúkok és nyulak vannak, ezeknek összesen 43 fejük és 124 lábuk van. Hány tyúk és hány nyúl van az udvaron?
   Megoldás: Tudjuk, hogy jó esetben a tyúkoknak két lába van, a nyulaknak négy, illetve minden állatnak egy feje van. *Feltételezzük*, hogy az udvaron csak tyúkok vannak, ebből következik, hogy kezdetben 43 fejjel és 43 ·2 = 86 lábbal számolunk.



3. ábra

A feladat adatai szerint maradt még 124 – 86 = 38 lábunk, amit kettesével kell kiosztanunk. 38:2=19, tehát 19 kétlábú állat fog kapni még két lábat, azaz az ábrán *k* helyét 19 váltja fel.



4. ábra

Tehát 19 nyúl és 43 −19 = 24 tyúk van az udvaron.
Próba: 19 ·4 + 24·2 = 76+48=124.□

5. Egy farakásban 2000 darab tölgyfa gerenda és fenyő gerenda van. Ezek együttes tömege 67500 kg. Egy fenyő gerenda tömege 30 kg, a tölgyfa gerendáé 45 kg. Melyik fajtából hány darab van a farakásban?
   Megoldás:
   Feltételezzük, hogy mind a 2000 gerenda fenyőfából készült.
   Tekintsük a következő táblázatot:

***3.** táblázat*

Nr	Fenyő gerendák *feltételezett* száma	Tölgyfa gerendák száma	Tömeg	Hiba
1	**2000**	0	2000·30 = 60000	67500−60000=**7500**
2	**1990**	10	1990·30+10·45=60150	67500−60150=**7350**
Észrevesszük, hogy miután a fenyő gerendák száma tíz egységgel csökkent, a hiba 150 egységgel csökkent. 7500:150=50, tehát 2000-ről 2000-50·10=1500-ra kell csökkenteni a fenyő gerendák számát ahhoz, hogy a hiba nullára csökkenjen.				
3	1500	500	1500·30+500·45=67500	Hiba 67500−67500 = 0

Tehát a farakásban 1500 fenyő gerenda és 500 tölgyfa gerenda van.□
A próba tulajdonképpen a harmadik sor harmadik cellájának tartalma.

KITŰZÖTT FELADATOK

1. Egy sor vázánk és virágunk van. Ha a virágokat hármasával tesszük a vázákba, akkor 5 virág marad váza nélkül, ha a virágokat ötösével rakjuk a vázákba, akkor 3 váza marad virág nélkül. Hány szál virágunk van? Hány vázánk van?

2. Nagyevő négy kalácsot eszik meg, ha csak kicsit éhes, hetet, ha nagyon éhes. Nagyevő megállapítja, hogy az elmúlt kilenc napon pontosan 39 kalácsot evett meg. Hányszor volt nagyon éhes Nagyevő az elmúlt 9 napon?

3. Lali 10 mérkőzést játszott Palival. A győzelemért 3, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Összesen hány döntetlen mérkőzés lehetett, ha ketten együtt összesen 27 pontot szereztek?

4. Ha a virágokat hármasával teszik vázákba, megmarad 6 szál virág. Ha négyesével teszik a vázákba, 2 váza marad üresen. Hány váza és hány szál virág van?

5. Egy osztályteremben a tanulók kettesével ülnek a padokban, de még így is üresen marad egy pad. Egyszer egy előadás alkalmával a tanító nénivel együtt hármasával ültek be a padokba, így 6 padot tudtak felszabadítani. Hány tanuló járt az osztályba, és hány pad volt a teremben?

6. Hány tanuló van abban az osztályban, amelyben, ha egy fiúból és egy lányból álló csoportokat alkotnak, akkor 8 lány nem kerül be a csoportokba, ha olyan csoportokat alkotnak, melyek 3 lányból és egy fiúból állnak, akkor 4 fiú marad ki a csoportokból?

7. Andris egy 20 kérdésből álló versenyen vesz részt. 8 pontot kap minden helyes válaszért, 5 pontot veszít minden hibás válaszért, 0 pontot kap, ha nem válaszol. Összesen 13 pontja van. Hány válasza volt helyes?

8. Ferinek 9 darab papírja van. Néhányat háromba vág, így összesen 15 darab papírja lett. Hány darab papírt vágott háromba Feri?

9. Egy tömbházban 14 lakrész van, kétszobás és háromszobás lakások. Ha a tömbházban 37 szoba van összesen, hány kétszobás és hány háromszobás lakás van?

10. Egy szál rózsa ára 7 lej, egy szál kardvirágé pedig 4 lej. Hány rózsát és hány kardvirágot vásárolt az a személy, aki 69 lejt fizetett 12 szál virágért?

11. Egy autóban összesen 30 láda sárgabarackot és őszibarackot szállítottak, ennek a szállítmánynak az össztömege 276 kg. Egy láda őszibarack tömege 8 kg, egy láda sárgabarack tömege pedig 10 kg. Hány láda, különböző típusú, barackot szállítottak?

12. Csaba 27 bélyeget vásárolt, amely 156 lejbe került. Ha egy nagy bélyeg ára 8 lej és egy kis bélyeg ára 3 lej, számítsátok ki, hány nagy bélyeget és hány kis bélyeget vásárolt?

13. Egy iskolába 60 széket és asztalt hoztak, amely 8928 lejbe került. Egy szék ára 108 lej, egy asztalé pedig 210 lej. Számítsátok ki, hány széket és hány asztalt hoztak az iskolába!

14. Egy gyümölcsös kosárban háromszor több szilva van, mint alma. Az asztalnál 4 személy ül, mindenik kivesz egyet-egyet a kosárból. Így a kosárban negyedannyi alma marad, mint szilva. Hány darab alma és hány szem szilva volt a kosárban eredetileg?

15. 18 pénzdarab van a zsebemben, csupa 2 és 5 forintos. Ha annyi ötösöm lenne, mint ahány kettesem van, és annyi kettesem, mint ahány ötösöm, akkor kétszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van. Mennyi pénzem van?

16. Egy szobában csak három- és négylábú székek vannak. Ha mindegyikre ráül egy-egy kétlábú ember, és más nincs a szobában, akkor összesen 39 lábat számolhatunk itt össze. Összesen hány szék lehet ebben a szobában?

17. Hét dobozba őszibarackot tettek. Az első dobozba valamennyit, minden következőbe pedig 3-mal többet, mint az előzőbe. Így az utolsó dobozba kétszer annyi őszibarack került, mint az elsőbe. Hány őszibarackot tettek az egyes dobozokba?

18. Egy üzletben 210 kg almát adtak el két fajtából, és így ebből a bevételük 256 lej volt. Az egyik fajta alma ára 1,3 lej/ kg, a másik fajtáé 1,1 lej/kg. Számítsuk ki az eladott almamennyiséget fajtánként.

19. Egy kg cukor ára 1 lejjel több, mint 1 kg liszt ára. Ha egy háziasszony az összes pénzére cukrot venne, ez 17 kg-ra lenne elég, és még maradna 4 leje. Ha minden pénzére lisztet vásárolna, akkor 20 kg lisztet tudna megvenni. Hány lejből vásárolhatott a háziasszony?

20. Egy előadásra 415 belépőjegyet adtak el 4, illetve 6 lejes jegyeket. A jegyekért 2160 lejt fizettek. Melyik fajtából hány jegyet adtak el?

21. Egy osztályteremben, ha a tanulók kettesével ülnek be a padokba, 9 tanulónak nem jut hely. Ha hármasával ülnek a padokba, akkor 7 pad üresen marad és egy padban egy tanuló fog ülni. Hány tanuló és hány pad van?

22. Egy fizika versenyen 5 pontot adnak minden jól megoldott feladatért és levonnak 3 pontot minden elrontott feladat esetén. Egy tanulónak 10 feladatot kellett megoldania és erre 26 pontot szerzett. Hány feladatot oldott meg helyesen?

23. Egy gazdasági udvaron tyúkok, rucák és juhok vannak, összesen 100-an. Tudva, hogy 280 lábat számlálhatunk és, hogy a rucák száma harmada a tyúkokénak, számítsuk ki az egyes állatok számát.

24. Egy matematika teszt 10 kérdésből áll. Minden helyes válaszért 10 pont jár, a rossz válaszokért 3 pontot vonnak le. Julcsi minden kérdésre válaszolt, és így 61 pontot szerzett. Hány kérdésre válaszolt helyesen?

25. Két szám szorzata 24. Amennyiben az egyik számot 2-vel növeljük, a szorzat 12- vel nő. Adjuk meg a két számot.

26. Egy üdülőhajó 159 kabinjának minden helyét elfoglalta a 379 utas. A fülkék 2, 3 és 4 személyesek. A hajón nyolcszor annyi kétszemélyes fülke van, mint négy személyes. Hány fülke van az egyes fajtákból?

27. Egy 30 fiúból és lányból álló csoport 186 kg erdei gyümölcsöt gyűjtött. Ha tudjuk, hogy a lányok egyenként 8 kg gyümölcsöt gyűjtöttek, a fiúk pedig 5 kg-ot, számítsuk ki hány fiú és hány lány van a csoportban.

28. Több gyerek egy labdát szeretne vásárolni. Ha mindenik gyerek 2,5 lejt adna, akkor 5 lej hiányozna a labda árából. Ha mindenik 3,5 lejt adna, akkor 4 lejjel több pénz gyűlne a szükségesnél. Hányan vannak a gyerekek, és mennyibe kerül a labda?

29. Egy osztályba 30 gyerek jár, több a fiú, mint a lány. Egyik szünetben a lányok egy-egy linzert, a fiúk egy-egy pogácsát vettek. Mindkét sütemény egész számú forintba került. Ha a lányok vettek volna pogácsát és a fiúk linzert, akkor az osztály összesen 2 forinttal kevesebbet költött volna. Hány fiú és hány lány jár ebbe az osztályba?

30. Andrea házi feladatot kapott, amit egy bizonyos nap után be kell, mutasson az iskolában. Úgy számolja, hogy ha 8 feladatot oldana meg minden nap, akkor 4 feladat megoldatlan maradna, így elhatározza, hogy 11 feladatot fog megoldani, így két szabad nap marad és egy nap csak egy feladatot kell megoldania. Hány feladatot oldott meg Andrea, és hány nap alatt oldotta meg ezeket?

31. 15 CD-nk van. Egyes CD-ken két dalt rögzítettünk, más CD-ken 5 dalt rögzítettünk. Összesen 54 dal került rögzítésre. Hány 2 dalos és hány 3 dalos CD van?

32. Egy farmon 36 tehén van. Ha a takarmányt 5 kg/nap fejadagokban fogyasztják, akkor 5 nappal hamarabb elfogy, mintha 4 kg/napos fejadagokban fogyasztanák. Számítsuk ki hány kg takarmány volt.

33. Egy kisfiú pókokat és cserebogarakat gyűjtött össze, összesen 8 darabot. (A póknak 8, a cserebogárnak 6 lába van.) Mennyi ebből a pók és mennyi a cserebogár, ha összesen 54 lábuk van?

34. Régi kínai feladat: Egy kalitkában nyulak és fácánok vannak. Az állatoknak összesen 35 fejük és 94 lábuk van. Hány nyúl és hány fácán van a kalitkában?

35. Józsinak születésnapja van. Osztálytársait egy zacskóból pralinéval kínálja. Józsi kiszámolta: ha két pralinét ad minden osztálytársának, akkor 17 darab pralinéja megmarad, viszont ha három pralinét oszt ki, akkor 15 osztálytársnak csak 2-2 praliné jut. Hány gyerek van a Józsi osztályában, és hány szem praliné volt eredetileg a zacskóban.

36. Egy szálloda 12 szobájában 32 férőhely van. A szobák 2, illetve 3 ágyasok. Hány 2 ágyas és hány 3 ágyas szoba van a szállodában?

37. Van egy bizonyos számú dobozunk és egy bizonyos számú ceruzánk. Ha minden dobozba 10 ceruzát helyeznénk, akkor 6 doboz üresen maradna, és egy dobozba 9 ceruza kerülne. Amennyiben 6 – 6 ceruzát helyeznénk egy-egy dobozba, úgy 3 ceruza a dobozokon kívül maradna. Hány ceruzánk és hány dobozunk van?

38. Zoli a zeneiskola folyosóján háromlábú és négylábú székeket számlált, összesen 16-ot. A 16 széknek 54 lába volt. Hány szék volt háromlábú, hány négylábú?

39. Egy feladatcsoport 11 kérdésből áll. Egy helyes válasz 9 pontot ér, egy helytelen válaszért 3 pontot vonnak le.
    a. Albi négy kérdésre válaszolt helyesen. Hány pontot kapott?
    b. Ferkónak 51 pontja van. Hány helyes válasza volt?
    c. Lehetséges 0 pontot kapni? Indokoljuk a választ!

40. Egy teremben, ahol csak gyerekek és négylábú székek vannak, 20 fejet és 144 lábat számoltunk. Hány széken nem ül gyerek, ha minden széken legfeljebb egy gyerek ül?

41. Meseország egyik szigetén élnek a negyvenlábúak és a háromfejű sárkányok. Tudjuk, hogy összesen 26 fejük van és 298 lábuk. Minden negyvenlábúnak egy feje van. Hány lába van egy háromfejű sárkánynak?

42. Egy informatika laborban több asztal van, minden asztalon ugyanannyi számítógép. Ha két diák ül egy asztalhoz, úgy 9 diák állva marad. Ha négy diák ül le egy asztalhoz, akkor két asztal üresen marad. Ebben az esetben minden diáknak jut egy-egy számítógép. Adjuk meg a diákok, asztalok és számítógépek számát.

43. Egy raktárban 45 üres láda van. Vannak 12 kg-os ládák, amelyekben 12 kg élelmiszert lehet tárolni, illetve 16 kg-os és 25 kg-os ládák. A 12 kg-os ládák száma néggyel kisebb a 16 kg-os ládák számának háromszorosánál. A 45 ládába 697 kg élelmiszert lehet tárolni. Határozzuk meg az egyes ládák számát.

44. Egy katonai egység 18 katonája céllövészeten volt. A céllövészeten egy három koncentrikus körből álló céltáblát kellett eltalálni. Ha a legbelső körbe talál a lövő, akkor tíz pontot kap, ha a középsőbe, akkor 6 pontot kap, ha meg a harmadik, legkülső körbe talál a lövő akkor 2 pontot kap. Minden katona 10-szer lőtt. Hazafele megállapították, hogy összesen 40-szer találtak a második körbe, 40 lövés nem érte a céltáblát, és 40 lövés az első vagy a harmadik körbe talált, és így 920 ponttal tértek haza a lövészetről. Hány lövés talált az első körbe? Hát a harmadikba?

45. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Hány sárkány él a szigeten, ha összesen 118 fejük van?

46. Nagyivó étkezéskor 5 akó vizet iszik meg, ha nem szomjas, és 7 akót, ha szomjas. Nagyivó kiszámolta, hogy összesen 39 akó vizet ivott meg. Hány nap alatt itta meg ezt a vízmennyiséget, és hányszor volt szomjas? Lehetséges több megoldás?

47. Hogyan tudunk 9 és 24 tallér névértékű pénzérmékkel 70 tallért kifizetni?

48. Két vadász tart hazafelé a vadászatról. Találkoznak egy kirándulásról hazatérő osztállyal. A gyerekek megkérdezik tőlük, hogy hány vadat lőttek.
    Az egyik így felelt:
    – Mindketten ugyanannyi vadat terítettünk le. Én ugyanannyi foglyot lőttem, mint ahány nyulat a társam, más állatot pedig nem ejtettünk el!
    A másik azt mondja:
    – Én megszámláltam a lábukat, és úgy találtam, 48 lábuk van összesen!
      Azt nem árulták el, hogy mindketten lőttek-e nyulat, illetve foglyot. Hány vadat lőttek összesen, és ebből mennyi a nyúl, és mennyi a fogoly? Mi lehet a zsákmányuk külön-külön?

3. FEJEZET

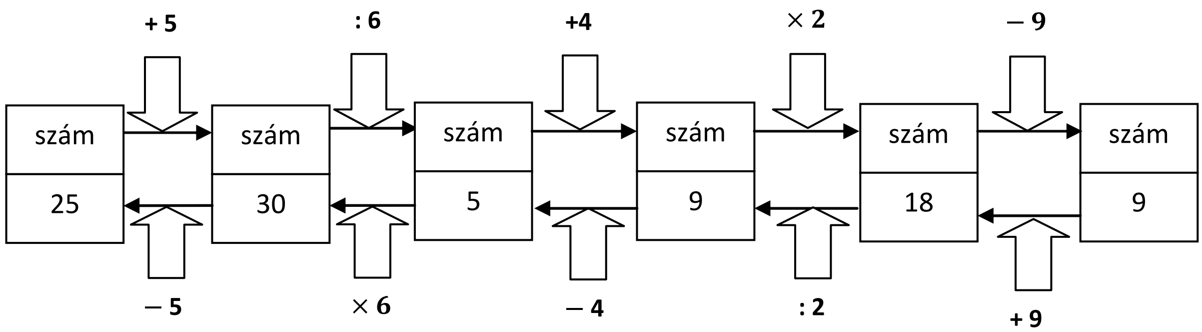
A FORDÍTOTT ÚT MÓDSZERE

A módszere lényege, hogy a feladat leírásában szereplő $p_1, p_2, \dots, p_k$ aritmetikai műveleteket figyelembe véve, a végeredményből kiindulva a feladat adataira a $\overline{p_k}$, $\overline{p_{k-1}}, \dots \overline{p_1}$ műveleteket alkalmazzuk, a leírt sorrendben, figyelembe véve, hogy a $\overline{p_i}$ művelet a p_i művelet fordított, inverz, művelete.

MEGOLDOTT FELADATOK

1. Gondoltam egy számot, hozzáadtam 5-öt, elosztottam 6-tal ezután hozzáadtam 4-et, utána megszoroztam 2-vel, végül kivontam 9-et és végeredményként 9-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
Megoldás: a feladat megoldására rakjuk sorba a feladatot leíró mondatokat, műveletenként:
a) *„Gondoltam egy számot"*
b) *„hozzáadtam 5-öt"*
c) *„elosztottam 6-tal"*
d) *„hozzáadtam 4-et"*
e) *„megszoroztam 2-vel"*
f) *„kivontam 9-et"*
g) *„végeredményként 9-et kaptam"*

A pontokat olvasva, keressük meg az ábrán a megfelelő műveletet (1. ábra). A feladat direkt leírása balról jobbra a nyilak irányában halad. A megoldás jobbról balra halad, az első téglalap fele, minden visszalépésnél a szemben lévő művelet ellentettjét (pld. szorzás helyett osztás) alkalmazzuk.



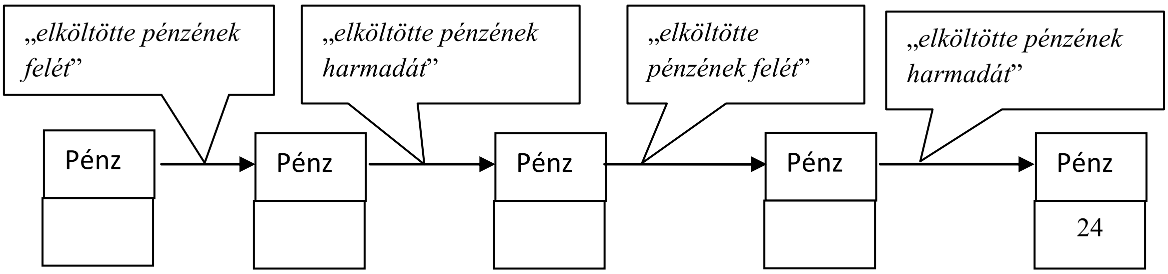
1. ábra

A feladatot ettől kezdve úgy oldjuk meg, hogy a végeredményre alkalmazzuk a visszafele olvasott pontokban (f, e, d…) leírt műveletek *kiegészítő műveleteit* (összeadás helyett kivonást, szorzás helyett osztást). Például: *kivontam 9-et* helyett a *hozzáadtam 9-et*, *megszoroztam 2-vel* helyett osztottam *2-vel.* Az ábra szemlélteti az oda-vissza műveleteket. Amennyiben az *oda* műveleteket is ábrázoljuk, úgy a visszafele út műveletei is könnyebben beállíthatjuk.
Megjegyzés: *Ajánlatos az egyes pontokban leírt műveleteket olvasva, rajzolni az ábrát, így mindenki számára érthetőbb lesz a megoldás.*

2. Ilonka az első nap elköltötte pénzének felét, a második nap a meglévő pénzének harmadát, a harmadik nap a meglévő pénz felét, negyedik nap a meglévő pénz egyharmadát, így 24 tallérja maradt. Hány tallérja volt eredetileg Ilonkának?

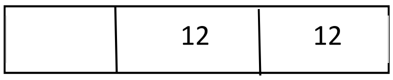
Megoldás: Sorba rakjuk a feladatot leíró mondatokat (2. ábra):

a) *„elköltötte pénzének felét”*
b) *„elköltötte pénzének harmadát”*
c) *„elköltötte pénzének felét”*
d) *„elköltötte pénzének harmadát”*
e) *„maradt 24 tallér”*



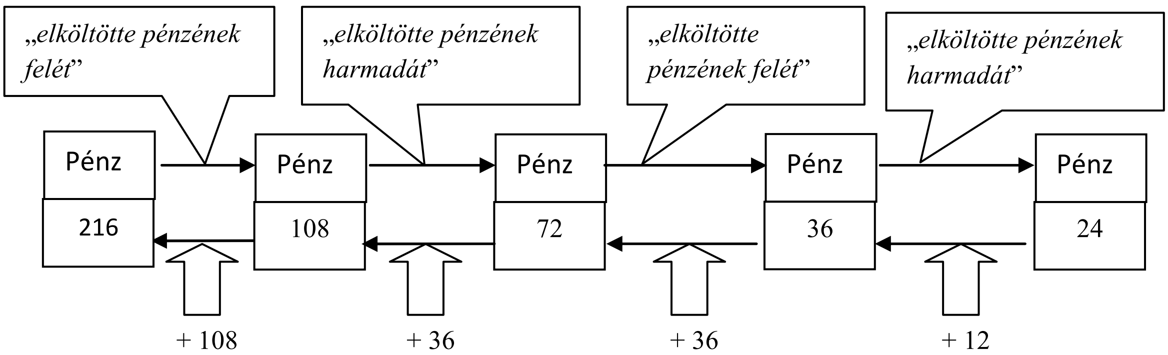
2. ábra

Az út visszafele egy kicsit körülményesebb. Miután Ilonka elkötötte a pénzének harmadát, maradt még 24 tallérja. Nos, ez a 24 tallér egy *bizonyos összeg kétharmada*:



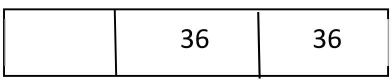
3. ábra

Tehát, az utolsó napon Ilonka 12 tallért költött



4. ábra

Az ábra továbbrajzolásakor feltesszük magunknak a kérdést: minek a fele 36? A válasz természetesen 72, illetve most Ilonka “visszakapja” az elköltött 36 tallért. A továbbiakban a 72 tallérról tudjuk, hogy az egy bizonyos pénzösszeg kétharmada (5. ábra).



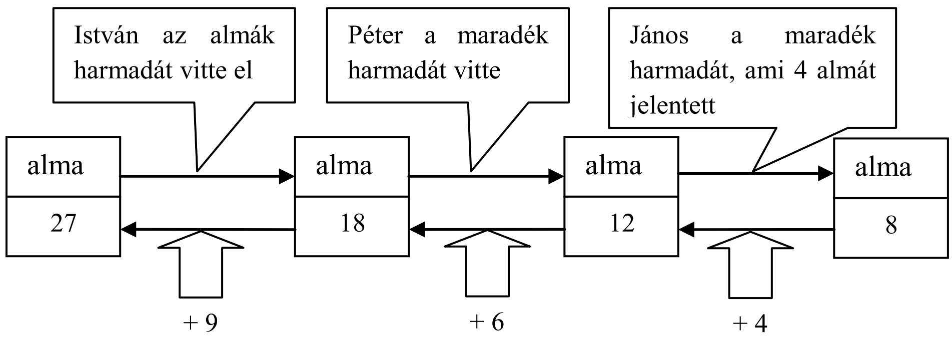
5. ábra

Megállapítjuk, hogy az elköltött *egyharmad* az 36 tallér (5. ábra), így az első nap után Ilonkának 108 tallérja volt. Miután a 108 tallér egy bizonyos pénzösszeg *fele*, könnyen belátható, hogy az eredeti összeg 108 + 108=216 tallér volt.□

3. Egy anya néhány almát rakott az asztalra és azt mondta a három fiának, hogy osszák el egyenlően egymás közt, amikor hazajönnek az iskolából. Először István érkezett haza, elvette az almák 1/3-át és elment. Utána Péter jött meg, és nem tudva arról, hogy János már elvett bizonyos számú almát, elvette az asztalon maradt almák 1/3-át és elment. Végül megérkezett János és ő is a megmaradt almák 1/3-át vette magához. Természetesen ő sem tudott arról, hogy testvérei már vettek az almából. Számítsátok ki hány almát hagyott az anya az asztalon, ha János 4 almát vett el?

Megoldás (6. ábra):

- István az almák harmadát vitte el
- Péter a maradék harmadát vitte
- János a maradék harmadát, ami 4 almát jelentett



6. ábra

Amennyiben János 4 almát vitt el, és 4 egy bizonyos mennyiség harmada, határozzuk meg az egészet, illetve a kétharmad részt (7. ábra). A 7. ábra alapján, az asztalon 8 alma maradt.

4	4	4

7. ábra

Péter az asztalon lévő alma harmadát vitte el. A megmaradt kétharmad rész alma szám szerint 12 (8. ábra).

6	6	6

8. ábra

Miután 18 a megmaradt kétharmad, az István által elvitt egyharmad rész az szám szerint 9 almát jelent, így az asztalon az édesanya 27 almát hagyott.□

4. Négy számról a következőket tudjuk:

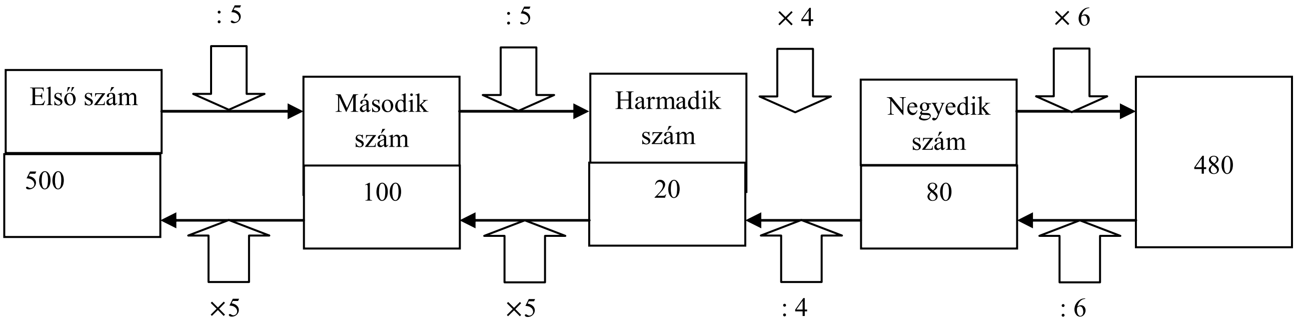
a) Az első 5-ször nagyobb, mint a második;
b) A második 5-ször nagyobb, mint a harmadik;
c) A harmadik 4-szer kisebb, mint a negyedik;

d) A negyedik 6-szor kisebb, mint 480.

Adjuk meg a számokat.

Megoldás:

Elkészítjük a feladat megoldásához szükséges ábrát (9. ábra):



9. ábra

Az ábrán látható az egyes keresett számok értéke.□

KITŰZÖTT FELADATOK

1. Ha egy számhoz hozzáadjuk a 2/3-át és az így kapott számból kivonjuk az összeg 1/3- át, akkor 10-et kapunk. Melyik ez a szám?

2. Egy kosárban volt néhány alma. Anna hozzátett ugyanannyit. Bori ezután elvette a kosárban éppen lévő almák negyedét és még egyet. Ekkor 110 alma maradt a kosárban. Összesen hány darab alma volt a kosárban eredetileg?

3. Egy berendezés felszereléséhez egy tekercs huzalt használtak fel a következőképpen: az első nap 50 métert és a megmaradt huzal felét, a második nap 40 métert és a megmaradt huzal harmadát, a harmadik nap pedig 30 métert és a megmaradt huzal negyedét, míg végül a negyedik nap a megmaradt 90 métert használták fel. Hány méter huzal volt a tekercsben?

4. Egy apa minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelettel: a legidősebb kapjon 1000 tallért és a maradék egytizedét, a második kapjon 2000 tallért és a maradék tizedét, a harmadik kapjon 3000 tallért és a maradék tizedét, és így tovább. Így minden gyermek ugyanannyi pénzt kapott. Hány gyermeke és mennyi pénze volt az apának?

5. Három munkás egy munkáért kapott pénzösszeget így osztotta el egymás között: az első az összeg felét és még 21 ezer tallért, a második az első pénzösszegének felét és még 21 ezer tallért, a harmadik pedig a második pénzösszegének felét és 21 ezer tallért kapott. Hány tallért kapott külön-külön mindegyik munkás?

6. Panninak volt egy bizonyos összege, amivel vásárolni indult. Az első nagyáruházban elkötötte pénzének harmadát, a másodikban a maradék harmadát, a harmadikban a maradék harmadát, a negyedik nagyáruházban még volt 8 tallérja. Hány tallérja volt Panninak a bevásárló körút előtt.

7. Egy edényből először kivesszük tartalmának a negyedét, másodszor a maradék két kilencedét és még 10 litert, harmadszor pedig a maradék harmadrészét. 40 liter folyadék marad az edényben. Hány liter folyadék volt eredetileg az edényben?

8. Egy tolvaj, miután zsákját teletömte, kifelé iszkolt egy narancsligetből. Ám szerencsétlenségére egy őrrel találkozott. Hosszú alkudozások után az őr elengedte, de előbb a zsákmány felét és a tolvajéból egy narancsot megtartott magának. Szegény tolvajtól ugyancsak elpártolt a szerencse, mert még háromszor találkozott őrrel, és mindegyik ugyanazt a büntetést szabta ki rá. Végül, mikor már messze járt a ligettől, megnézte, mennyi narancsa maradt, és keserűen állapította meg, hogy egy sem. Hány narancs volt eredetileg a tolvaj zsákjában?

9. Egy kosárból kivesszük az almák felét és 1 almát, utána a meglevő almák kétharmadát és még 2 almát, ezután a meglévő almák háromnegyed részét é még 3 almát. Ha ezután a meglevő almák felét is elvesszük és még öt almát, pontosan 4 alma marad a kosárban. Hány alma volt eredetileg a kosárban?

10. Marika egy kosár virágot vitt a piacra. Először eladott 1 szál virágot és a megmaradt virágok felét, utána eladott 2 szál virágot és a meglevő virágok kétharmadát, majd eladott még 3 szál virágot és a meglevő virágok háromnegyed részét. Végül eladott még 5 szál virágot és a meglevő virágok felét, így pontosan 4 szál virág maradt a kosárban. Hány szál virágot vitt Marika eladni?

11. Egy kártyajátékos először elvesztette a pénze felét, majd nyert 50 tallért. Azután elvesztette meglevő pénzének egyötödét, majd nyert 40 tallért. Azután elvesztette meglevő pénzének hatodát és még 50 tallért, így 350 tallérja marad. Mennyi pénzzel ült le játszani?

12. Egy kirándulócsoport szilvát kapott uzsonnára. A kirándulás vezetője úgy osztotta szét a kirándulók között a szilvát, hogy az első kirándulónak adott egy szilvát és a megmaradt szilvák egy 9-ed részét, a másodiknak 2 szilvát és az így megmaradt szilvák 9-ed részét, a harmadik kirándulónak 3 szilvát és ismét a most megmaradt szilvák 9-ed részét, és így tovább. Az utolsó részt a kirándulásvezető magának tartotta meg. Csodálkozva látták, hogy mindegyikük egyenlően kapott a szilvákból. Hány szilvát kapott a kirándulócsoport uzsonnára? Hányan voltak? Hány szilvát kapott egy-egy kiránduló?

13. Egy turistacsoport 4 napos gyalogtúrára indult. Az első nap megtette a tervezett út hosszának harmadát. A második nap megtett 2 km-t és a megmaradt út felét, a harmadik nap a hátra maradt út negyedét és még 2 km-t. A negyedik napon még 7 km-t kellett gyalogolniuk. Hány km hosszú a tervezett út, és hány km-t gyalogoltak naponta?

14. Gondoltam egy számot, megszoroztam 5-tel, utána hozzáadtam 42-t, ezt elosztottam 7-tel, amit kaptam abból kivontam 11-et és így 200- t kaptam. Melyik számra gondoltam?

15. Egy utasnak bizonyos útszakaszt kell megtennie. Az első nap megteszi az útszakasz felét, második nap a megmaradt rész 3/5-ét, a harmadik nap az utolsó 20 km-t. Mennyi az útszakasz hossza?

16. Három fán 36 varjú ül. Később az első fáról átrepül 6 varjú, a másodikról pedig 4 varjú a harmadikra, ekkor a három fán a varjak száma egyenlő lett. Hány varjú ült eredetileg minden fán?

17. Hány leje volt annak a tanulónak, akinek, miután elköltötte a pénzösszegének 3/5-ét, majd a megmaradt pénzének 3/4-ét és még 34 lejt, pontosan 14 leje maradt?

18. Egy edényből először kivesszük a tartalmának 1/4 részét, másodszor a maradék 2/9 részét és még 10 litert, harmadszor a maradék 1/3 részét. Ekkor 40 liter marad az edényben. Hány liter folyadék volt az edényben?

19. Egy diák megkérdezi a tanárt, hogy hány éves. A tanár így felel: „*Ha még 1/4 annyit élek, mint amennyit éltem és még 5 évet, akkor 50 éves leszek!*”. Hány éves a tanár most?

20. Gondoltam egy számra, megszoroztam öttel, hozzáadtam 42-t, ezt elosztottam héttel, amit kaptam, abból kivontam 11-et és így 20-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

21. Egy leány az első nap elköltötte pénzének felét, a második nap a megmaradt pénzének harmadát, aztán megint a maradék felét, majd a negyedik napon az akkorra maradt pénz harmadát. Így aztán 24 tallérja maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?

22. Hány tojás volt abban a kosárban, amelynek a tartalmát három vevő úgy vásárolta meg, hogy az első megvette a tojások felét és egy fél tojást, a második a megmaradt tojások felét és egy fél tojást, a harmadik ugyancsak a neki maradt tojások felét vette meg és egy fél tojást, ha tudjuk, hogy egyetlen tojást sem kellett széttörni és 4 tojás maradt? Hányat vásároltak fejenként?

23. Egy berendezés elkészítéséhez egy tekercs huzalt használtak fel a következőképpen: az első nap 50 métert és a megmaradt huzal felét, a második nap a maradékból 40 métert és az azután maradt huzal harmadát, aztán 30 métert és a maradék huzal negyedét. Hány m huzal volt a tekercsben, ha 90 m huzal maradt?

24. Három fiúnak volt valamennyi almája. Az első fiú a sajátjából adott a másik kettőnek annyit, amennyi annak már volt. Aztán a második adott a másik kettőnek annyit, amennyi annak már volt. Ugyanígy adott a harmadik is a másik kettőnek. Így aztán mindenik fiúnak 8-8 almája lett. Hány almájuk volt eredetileg a fiúknak külön-külön?

25. A mesebeli róka egy legénnyel ilyen egyezséget kötött: valahányszor átmegy egy hídon, a róka megkétszerezi a fiú pénzét, amiből aztán ez köteles fizetni 24 krajcár vámot. A legény úgy gondolta, hogy jó vásárt csinált, de miután a harmadik hídon is átment és kifizette a vámot, nem maradt egy krajcárja sem. Mennyi pénze volt eredetileg?

26. Egy pénzösszeg harmadát könyvekre, a maradék negyedét írószerekre, az újabb maradék negyedét füzetekre költötték. Ezután 450 lej maradt. Mennyi pénz volt eredetileg?

27. Mennyi pénze volt annak a vásárlónak, aki először elköltötte pénzének 3/7-ét, aztán a maradék 3/5-ét, aztán 160 lejt. Így 240 leje maradt. Mennyi pénze volt eredetileg, és rendre hogyan költekezett?

28. Egy tanuló így költekezett: Az első nap elköltötte pénzének felét és még 5 lejt. Azután a maradék pénz felét és még 5 lejt. Harmadszorra is a maradék felét és még 5 lejt, negyedszerre ugyanúgy, és aztán semmi pénze nem maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?

29. Egy matematika versenyen az első próba után kiesett a versenyzők harmada, egy tanuló lemondott. A második próba után kiesett a tanulók ötöde, aztán 4 tanuló mondott le. A harmadik próba után a tanulók negyede esett ki, majd lemondott 8 tanuló. Így 40 tanuló maradt versenyben. Hány tanuló indult a versenyen?

30. Ha egy labdát egy bizonyos magasságból elengednek, a földet érés után feleakkora magasságra ugrik föl, mint amilyen magasból elengedték. Tudjuk, hogy egy labda miután elengedték háromszor ért földet, és háromszor ugrott föl. Harmadszorra 1 m magasra emelkedett. Milyen magasságból ejtették le?

31. Gondoltam egy számra. Elosztottam 3-mal, az eredményhez hozzáadtam 5-öt, a kapott számot megszoroztam 6-tal, A szorzatból kivontam 42-t. Így a legkisebb háromjegyű számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

32. Gondoltam egy számra, megszoroztam 4-gyel, a szorzatból kivontam 3-at, a különbséget megszoroztam 3-mal, a szorzathoz hozzáadtam 5-öt, az összeget elosztottam 4-gyel, a hányadoshoz 1-et adtam. Így az eredeti szám háromszorosát kaptam. Magyarázzuk meg, miért!

33. Egy vándorkereskedő három vásárba ment el. Az elsőben megkétszerezte a pénzét és 30 tallért költött. A másodikban megháromszorozta a pénzét és 54 tallért költött. A harmadikban megnégyszerezte a pénzét és 72 tallért költött el. Ekkor még maradt 48 tallérja. Hány tallérral indult eredetileg?

34. Egy osztályban a gyerekek fele és még egy fél gyerek sportol, a megmaradt gyerekek fele és még egy fél gyerek zenét tanul, a többi négy pedig színjátszó körre jár. Hány gyerek van az osztályban?

35. Marika vásárolni megy. Az egyik üzletben elkölti pénzének 2/5-ét és még 10 lejt, a második helyen 30 lejjel kevesebbet, mint a megmaradt pénz 3/4-e, a harmadik alkalommal a megmaradt pénz felét költi és még 30 lejt. Hány lejjel indult vásárolni, ha végül 10 lejjel tért haza? Hány lejt költött az egyes üzletekben?

36. Egy személy egy bizonyos pénzösszeggel rendelkezett. A pénz felére egy pár csizmát vásárolt, majd egy inget 48 lejért és 12 lejre élelmet, így 23 leje maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?

37. Egy természetes szám 12-vel nagyobb mint egy másik. Ha a nagyobb szám negyedébőlkivonunk 12-t, akkor az eredmény 13. Melyik a kisebbik szám?

38. Egy osztályban levő tanuló fele különböző tantárgyversenyeken vett részt. Ezek negyede és még 6 tanuló matematika olimpiára ment. Hány tanuló van az osztályban, ha a matematika olimpián 9 tanuló vett részt?

39. Ha egy természetes számból kivonunk 15-öt, az eredmény kétszereséből kivonunk 34-et, majd az így kapott különbséget elosztjuk 11-gyel, a hányadoshoz hozzáadunk 12-t, akkor az eredmény 18 lesz. Melyik az eredeti szám?

40. Gondoltam egy számra. Ha a számot megkétszerezném és hozzáadnám az eredeti szám felét, aztán az eredeti szám negyedét, aztán hozzáadnék 25-t, akkor az eredmény 146 lenne. Határozzuk meg az általam gondolt számot!

41. Jankónak van egy pénzösszege. Segített a szomszédnak fát lerakni, így megkétszerezte az összeget. Ezután elköltött 200 krajcárt. Miután egy hétvégét a helyi közértben segített, sikerült újra megkétszerezni a pénzét. Ezután 400 krajcárt kölcsön adott Sanyinak. Valahogy megint sikerült megkétszerezni a maradék pénzt, amiből elköltött 600 krajcárt. Jankónak most 100 krajcárja van. Hány krajcárja volt eredetileg?

42. Egy szám háromszorosa és a 10 különbségének egyötöd részéhez hozzáadunk 20-at, majd az eredményt elosztjuk 3-mal, így 9-et kapunk. Határozzátok meg az eredeti számot!

43. Egy iskolai előadás alkalmából első nap eladták a jegyek negyed részét és még 12 jegyet, a második nap eladtak még 126 jegyet. Két nap alatt 219 jegyet adtak el összesen. Hány jegy maradt eladatlan?

44. András testvérének adta a cukorkáinak negyed részét és 6 cukorkát padtársának adott.Hány cukorkája volt kezdetben, ha neki 3 cukorka maradt?

45. Anna, Bella és Csilla a következőképpen osztott el egy kosár almát:

a) Anna elvette az almák harmadát;
b) Bella elvette a maradék harmadát;
c) Csilla elvette a maradék harmadát
d) a maradékot harmadolták, és mindenki megkapta a maradék egy-egy harmadát.

Tudjuk azt, hogy eredetileg 100-nál kevesebb alma volt a kosárban. Hány almája volt az osztozás után a lányoknak?

46. Egy négynapos városi sportversenyen az összes érmet kiosztották. Minden nap kiosztották a meglevő érmek felét és még egyet. Határozzuk meg az érmek eredeti számát, illetve azt, hogy az egyes napokon hány érmet osztottak ki?

47. Egy gyümölcsraktárban, ahol ládákban almát tároltak, a következő eladások voltak:

e) az első nap eladták a ládák harmadát és még 25 ládát;
f) a második nap eladták a ládák kétharmadát és még 50 ládát;
g) a harmadik nap 50 ládával kevesebbet adtak el mint a rendelkezésre álló láda egyötöde.

A raktárban 270 láda alma maradt. Hány láda almát adtak el naponként?

4. FEJEZET

ARÁNYOSSÁGOK – AZ EGYSÉGRE VALÓ VISSZAVEZETÉS MÓDSZERE

Értelmezések:

1. Két egymástól függő mennyiség egymással *egyenes arányban van*, ha az egyik *n*-szeres *növekedése* a másik mennyiség *n*-szeres *növekedését* vonja maga után. Továbbá a két egymástól függő mennyiség egymással egyenes arányban vannak akkor is, ha az egyik *n*-szeres *csökkenése* maga után vonja a másik mennyiség *n*-szeres *csökkenését*.
2. Két egymástól függő mennyiség egymással *fordított arányban van*, ha az egyik mennyiség *n*-szeres *növekedése* maga után vonja a másik mennyiség *n*-szeres *csökkenését*, és fordítva: az egyik mennyiség *n*-szeres *csökkenése* maga után vonja a másik mennyiség *n*-szeres *növekedését*.

Megoldott feladatok

1. Nyolc munkás 12 nap alatt 336 m sáncot tud kiásni. Ugyanilyen munkaütem mellett, hány munkásra van szükség, hogy kiáshassanak 10 nap alatt 245 m sáncot?

Megoldás: Mindenek előtt tisztázzuk a feladatban szereplő, élő és élettelen dolgok „viszonyát"

munkás	*napok száma*	*munka*

a) A *munkás – napok száma* egymással *fordított arányban álló mennyiségek*, mivel rögzített munkamennyiség mellett *kétszer annyi munkás fele annyi nap alatt* végzi el a kijelölt feladatot.

b) A *munkás – munka* (tulajdonképpen munkások száma elvégzendő munka) egymással *egyenes arányban áll*, mivel rögzített idő alatt *kétszer annyi munkás kétszer annyi munkát* képes elvégezni.

c) A *napok száma – munka* egymással *egyenes arányban áll*, hiszen rögzített munkásszám mellett, *kétszer annyi nap alatt kétszer annyi munka végezhető el*.

A viszonyok tisztázása után elkészítjük a feladatot megoldó táblázatot. Célunk, hogy megtudjuk, hogy egy munkás, egy nap alatt a kijelölt munka hányad részét képes elvégezni, majd ebből kiindulva, lépésről – lépésre kiszámoljuk a feladatba szereplő új munkamennyiség hány napot igényel.

munkás	*napok száma*	*munka [sánchossz méterben]*
8	**12**	**336**

Tudni szeretnénk, hogy egy nap alatt a nyolc munkás hány méter árkot ás. Mivel a *napok száma és a munka mennyisége* egymással *egyenesen arányban* vannak, így *az egyik csökkenése, maga után vonja a masik ugyyanilyen arányú csökkenésé*t.

8	12:12 = **1**	336:12 = **28**

A következő lépés, hogy kiszámoljuk: egy munkás, egy nap alatt mekkora munkát képes elvégezni. A munkás és munka egymással egyenes arányban áll, így ha a munkások száma nyolcszor csökken, akkor a munka mennyisége is ugyanannyival csökken (lásd, mint lent!).

8:8 = **1**	**1**	28:8 = $\frac{7}{2}$ = **3.5**

Megállapítjuk, hogy egy munkás egy nap alatt 3.5 m sáncot képes kiásni. A következőkben kiszámítjuk, hogy egy munkás hány nap alatt képes kiásni 245 méter sáncot. A napok száma és a munka mennyisége egymással egyenes arányban áll. Figyelembe vesszük, hogy 70 × 3.5 = 245!

1	1× 70 = **70**	3.5×70 = **245**

A továbbiakban *hétszeresére növeljük a munkások számát*, ezzel együtt a *napok száma hetedrészére csökken*, mivel a két mennyiség *fordított arányban áll* egymással

1× 7 =**7**	70 :7=**10**	**245**

Tehát a feladat kérdésére válaszolva: 10 nap alatt, 7 munkás ássa ki a 245 méteres sáncot.□

2. Egy almafáról Attila 4 óra alatt, öccse pedig 8 óra alatt tudná leszedni az almát. Mennyi idő alatt szednék le az almát együtt?

Megoldás: a munkát ebben az esetben 1-nek tekintjük, hiszen egy fánk van. Bár körülményesnek tűnhet, mégis azt ajánljuk, hogy az arányossági viszonyokat minden ilyen típusú feladat előtt nagy figyelemmel vizsgáljuk meg, és rögzítsük azokat. Attilát és az öccsét munkásnak tekintjük.

munkás	*órák száma*	*munka*

Ismételjünk:

a) *munkás – napok száma:* fordított *arány.*
b) *munkás – munka*: *egyenes arány.*
c) *órák száma – munka: egyenes arány.*

Tudni szeretnénk, hogy Attila hányad részét végzi el a munkának *egy óra alatt*, ugyanezt szeretnénk tudni Öcsiről is.

Attila	*Órák száma*	*Munka*
1	4	1

Egy óra alatt Attila a munka 1:4 = $\frac{1}{4}$ - t végzi el:

1	4:**4** = 1	1:4 = $\mathbf{\frac{1}{4}}$

Öcsi	*Órák száma*	*Munka*
1	8	**1**

Egy óra alatt Öcsi a munka 1:8 = $\frac{1}{8}$ - t végzi el:

1	8:**8** = 1	1:**8 =** $\mathbf{\frac{1}{8}}$

A továbbiakban Attila és Öcsi együttes munkatempójára vagyunk kíváncsiak.

Öcsi +Attila	*Órák száma*	*Munka*
2	1	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$
2	2	$\frac{3}{8}\times 2=\frac{3}{4}$
2	$2+\frac{2}{3}$ = 2 óra 40 perc	$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}=1$

Tehát: Attila és Öcsi együtt 2 óra 40 perc alatt szedik le a fa gyümölcseit.

3. Egy kertből 20 felnőtt és 15 gyerek 12 nap alatt szedi le a gyümölcsöt, napi 7 órát dolgozva. Hány nap alatt szedi le a gyümölcsöt, ugyanakkora területről, egy 12 felnőttből és 20 gyerekből álló csoport, ha napi 6 órát dolgoznak és tudjuk azt, hogy 5 gyermek napjában ugyanannyi gyümölcsöt szed le mint 4 felnőtt.

Megoldás: Kézenfekvőnek tűnik, hogy a gyerekeket felnőttekkel helyettesítsük, majd a végeredménynél figyelembe vesszük, hogy nem csak felnőttek voltak a csoportban. Például 15 gyerek helyett számolhatunk 4 × (15 : 5) = 12 felnőttel.

A feladat adatai a következőképpen módosulnak: egy kertből 20 + 12 = 32 felnőtt, napi 7 órát dolgozva, 12 nap alatt szedi le a gyümölcsöt a területről. Ugyanekkora területről egy 12 + (20: 5) × 4 = 28 felnőttből álló csapat, napi hat órát dolgozva, hány nap alatt szedi le a termést?

Első lépésként tisztázzuk az arányossági viszonyokat:

a) *munkások száma – órák száma:* fordított *arány.*
b) *munkások száma – munka*: *egyenes arány.*
c) *órák száma – munka: egyenes arány.*

munkás	*órák száma*	*munka*
32	12 × 7 = 84	**1**

Egy munkás 84 óra alatt a munka harminckettedét végzi el:

1	84	$\frac{1}{32}$

Egy munkás egy óra alatt a munka $\frac{1}{2688}$ -ad végzi el:

1	84 **: 84**=1	$\frac{1}{32\cdot 84}=\frac{1}{2688}$

28 munkás 1 óra alatt a munka $\frac{28}{2688}$ -t végzi el:

$\mathbf{28 \times 1 = 28}$	1	$\frac{1}{2688} \times \mathbf{28} = \frac{28}{2688}$
28	$1 \times \frac{\mathbf{2688}}{\mathbf{28}} = \frac{672}{7} = 96$	$\frac{7}{672} \times \frac{\mathbf{672}}{\mathbf{7}} = 1$
28	96	1

Tehát a 28 felnőttnek megfelelő 12 felnőtt és 20 gyerek 96 óra alatt szedi le a gyümölcsöt. Miután 96 : 6 =16, megállapítjuk, hogy 12 felnőtt és 20 gyerek napi hat órát dolgozva 16 nap alatt szedi le a gyümölcsöt a kertből

4. 20 tehén 2550 kg takarmányt 15 nap alatt fogyaszt el. Hány nap alatt fogyaszt el 18 tehén 4590 kg takarmányt?

Felírjuk az arányossági viszonyokat:

a) *tehenek száma – takarmány mennyisége* rögzített napszám mellett, egyenes *arány*ban állnak (kétszeres tehénszám esetében kétszer annyi takarmány szükséges);

b) *tehenek száma – napok száma*, rögzített takarmány mennyiség mellet, *fordított arány*ban állnak (kétszer olyan nagy tehénállománynak a rögzített takarmány mennyiség fele annyi ideig lenne elég);

c) *takarmány mennyisége – napok száma*, rögzített tehénállomány mellett, *egyenes arány*ban állnak (kétszer annyi takarmány kétszer annyi ideig lenne elég).

tehenek száma	*takarmány* [kg]	*napok*
20	2550	15

Egy tehénnek 15 napra a szükséglete:

20 **:** **20** = 1	2550 **:** **20** = 127,5	15

Egy tehénnek egy napra a szükséglete:

1	127.5 **:** **15** = 8.5	15**:15**=1

18 tehén egy napi szükséglete:

1 × **18** = 18	8.5× **18** = 153	1

Miután észrevettük, hogy 4590 : 153 = 30, megkapjuk a végeredményt:

18	153 × **30** = 4590	1 × **30** = 30

Tehát a 18 tehén a 4590 kg takarmányt 30 nap alatt fogyasztja el.

5. Egy menyasszonyi ruhát 12 varrónő 18 nap alatt készít el. 12 nap múlva 4 varrónő elmegy. Hány nap alatt fejezik be a munkát az ott maradt varrónők?

a) *varrónők száma – napok száma*, rögzített munkamennyiség mellett, *fordított arányban vannak*, mivel kétszer annyi varrónő ugyanazt a munkát fele annyi idő alatt végzi el.
b) *varrónők száma – munka*, rögzített napok száma mellett, *egyenes arányban vannak*, hiszen kétszer annyi varrónő kétszer akkora munkát, két menyasszonyi ruhát képes megvarrni ugyanannyi idő alatt.
c) *napok száma – munka*, rögzített varrónőszám mellett, *egyenes arányban vannak*, mivel kétszer annyi nap alatt kétszer akkora munkát képes elvégezni egy bizonyos számú varrónő

varrónők száma	*napok száma*	*munka*
12	18	1
12	18 : **18**=1	$1 : \mathbf{18} = \frac{1}{18}$
12	1 × **12** = 12	$\frac{1}{18} \times \mathbf{12} = \frac{2}{3}$

Megállapítjuk, hogy a munka kétharmadát végezte el a 12 varrónő 12 nap alatt. A feladatot átfogalmazva, az a kérdés, hogy "*a munka egyharmadát nyolc varrónő hány nap alatt végzi el?"*.
A számításokkal visszatérünk az eredeti adatokhoz:

12	18	1
12:**12** = 1	18 × **12** = 216	1
1	216 **: 3** = 72	$1 : \mathbf{3} = \frac{1}{3}$
1 × **8** = 8	72 : **8** = 9	$\frac{1}{3}$

Megfigyelhető, hogy nyolc varrónő a munka egyharmadát kilenc nap alatt fejezi be, így az őszidő 12+ 9 = 21 nap, azaz 21 nap alatt lesz kész a feladat körülményei mellett a menyasszonyi ruha.

6. Ha 4 csapon 7 óra alatt 14 hektoliter víz folyik ki, akkor 3 csapon 60 perc alatt hány hektoliter víz folyik ki?
a) *csapok száma – idő* fordított arányban vannak, mivel kétszer annyi csappal fele idő alatt töltjük meg ugyanazt a térfogatot.
b) *csapok száma – víz* egyenes arányban vannak, mivel kétszer annyi csapon kétszer annyi víz folyik ki, amennyiben rögzítjük az időt.

c) *idő – víz* egyenes arányban vannak, mivel rögzített számú csap mellett kétszer annyi idő alatt kétszer annyi víz folyik ki.

csapok száma	*idő*	*víz [hl]*
4	7	14
4 : **4** = 1	7 × **4** = 28	14
1	28 : **28** = 1	14 : **28** = $\frac{1}{2}$
1 × **3** = 3	1	$\frac{1}{2} \times \mathbf{3} = \frac{3}{2}$

Tehát 3 csapon egy óra alatt $\frac{3}{2} = 1.5$ hl víz folyik ki.

KITŰZÖTT FELADATOK

TELJESÍTMÉNY – MUNKÁS – MUNKA

1. 8 ládában 24 kg összesen epret tárolunk. Feltételezve, hogy minden ládában ugyanannyi eper van, mennyi epret tárolhatunk 5 ládában

2. Egy farm 20 tehene 1550 kg takarmányt fogyaszt el 15 nap alatt. Hány nap alatt fogyaszt el ugyanilyen takarmányozás mellett 18 tehén 4590 kg takarmányt?

3. Egy építkezésnél 5 t törtkövet 30 km távolságra 750 lejért szállítottak el. Mennyibe kerül 8 t törtkőnek 40 km-re való szállítása?

4. Egy farmon 18 traktor 8 nap alatt 656 ha földet szántott meg. Két csoportban dolgoztak. Az első csoport naponta 4 ha-t tud megszántani, a második csoport 5 ha-t naponta. Hány traktor van az egyes csoportokban?

5. 240 m vásznat 20 szövőnő 4 nap alatt állít elő. Hány nap alatt készít 5 szövőnő 120 m vásznat?

6. Egy 5 főből álló szerelőcsoport naponta 30 motort tud összeszerelni. Hány motort tud összeszerelni naponta 8 munkás?

7. 25 traktorista 10 nap alatt 4000 ha szántót képes felszántani. Hány nap alatt szánta fel 15 traktorista az 5760 ha nagyságú szántót?

8. 6 munkás egy munkát 4 óra alatt végez el. Ugyanezt a munkát 8 munkás hány óra alatt végezi el?

9. Egy kertből 20 felnőtt és 15 gyerek 12 nap alatt szedi le a gyümölcsöt, napi 7 órát dolgozva. Hány nap alatt szedi le a gyümölcsöt, ugyanakkora területről, egy 12 felnőttből és 20

gyerekből álló csoport, ha napi 6 órát dolgoznak és tudjuk azt, hogy 5 gyermek napjában ugyanannyi gyümölcsöt szed le, mint 4 felnőtt.

10. 8 szövőnő napi 6 órai munkával 840 m vásznat 5 nap alatt sző meg. Hány nap alatt sző meg 630 m vásznat 5 olyan szövőnő, aki naponta 9 órát dolgozik?

11. Egy tehenészetben 120 napra, 160 tehénnek 216 t takarmányra van szüksége. Ha a napi adag nem változik, akkor 648 t takarmány 320 tehénnek hány napra lesz elég?

12. A nyári szünetben az iskolát 6 festő 8 nap alatt festi ki. Mennyi idő alatt festené ki az iskolát, ugyanilyen munkatempót feltételezve, 8 festő?

13. Nyolc munkás 20 nap alatt végezne el egy munkát. Öt nap múlva jön még 7 munkás. Hány nap alatt végezték el így a munkát?

14. Egy 8 munkásból álló csapat 5 nap alatt, napi 8 órát dolgozva 12312 munkadarabot állít elő. Egy másik csapat 12 munkásból áll, ezek napi 9 órát dolgozva 4 nap alatt 13800 munkadarabot állít elő. Melyik csoport dolgozott hatékonyabban?

15. Négy ács épít egy házat. Az első egymaga egy év alatt építi fel, a második egymaga 2 év alatt, a harmadik egyedül 3 év alatt, a negyedik pedig 4 év alatt. Mennyi idő alatt építik fel, ha együtt dolgoznak?

16. Egy étkezdében 150 embernek 12 napra 900 kg kenyérre van szüksége. Hány kg kenyér szükséges 70 embernek 18 napra?

17. A szőlőt 3 ember 18 óra alatt szüreteli le egy területről. Mennyi idő alatt szüretelné le 5 ember ezt a területet ugyanilyen munkatempóval?

18. Egy lakóházat egy kőműves 18 nap alatt tud felfalazni, egy másik 12 nap alatt, ha napi 8 órát dolgoznak. Mennyi idő alatt tudják felrakni, ha együtt dolgoznak?

19. Két gyermekcsoport egy munkát 8 óra alatt tud elvégezni. Kétórai közös munka után az egyik csoport gyermek elment, így a másik csoportnak a munka elvégzéséhez 18 órára volt szüksége. Számítsuk ki, mennyi idő alatt végeznék el a munkát a csoportok külön-külön.

20. Egy 10 tagú csoport egy munkát 20 nap alatt végezne el. Miután a csoport 10 napot dolgozott, a csoportból 6 munkást máshová irányítottak. Hány nap alatt fejezi be a munkát a maradék munkás?

21. Tíz munkás 10 nap alatt végezne el egy munkát. 3 nap múlva jön még 4 munkás, *azaz a negyedik napon már 14 munkás dolgozik ugyanazon a részben kész munkán*. Hány nap alatt végezték el így a munkát?

22. Egy lakópark házainak meszelésén 90 munkás dolgozik négy csoportban. Minden csoportnak ugyanakkora felületet kell kimeszelnie. Az első csoport 10 nap alatt, a második csoport 12 nap alatt, a harmadik csoport 15 nap alatt, míg a negyedik csoport 20 nap alatt tudja befejezni saját részét. Számítsuk ki, hogy hány munkásból állnak az egyes csapatok.

23. Egy étkezdében 15 személy 10 nap alatt 225 kenyeret fogyaszt el. 6 nap alatt 20 személy hány kenyeret fogyasztana el?

24. 8 teherautó egy bizonyos mennyiségű takarmányt 10 nap alatt szállít el. Hány nap alatt szállítja el ugyanezt a takarmánymennyiséget 5 teherautó.

HOZAM – CSAPOK – FELTÖLTÉSI IDŐ

1. Két csap együtt egy medence 3/4-t 5 óra 15 perc alatt tölti meg. Az egyik csap magában a medence 2/5-ét 4 óra alatt tölti meg. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét a második csap magában?
2. Egy medencébe 13 csapon keresztül 4680 l víz 72 perc alatt folyt ki. Kilenc azonos hozamú csapon mennyi idő alatt folyik ki 6750 l víz?
3. Egy medence 126 liter. Egy csap ezt a medencét 6 óra alatt tölti meg. A medencéhez kapcsolt lefolyó a medencét 9 óra alatt üríti ki. Mennyi idő alatt telik meg a medence, amennyiben a csap és a lefolyó is nyitva van?
4. 13 azonos hozamú csapon 72 perc alatt 4680 l víz folyik ki. Mennyi idő alatt folyik ki 9 ugyanilyen csapon 6750 l víz?
5. Egy medence feltöltéséhez 3 csapot használhatunk. A csapok vízhozamáról a következőket tudjuk: az első és a második csap együtt 3 óra, a második és a harmadik együtt 4 óra, míg a harmadik és az első csap együtt 6 óra alatt töltené meg a medencét. Hány óra alatt töltenék fel a medencét a csapok külön-külön?
6. Ha 4 csapon 7 óra alatt 14 hektoliter víz folyik ki, akkor
    a. 4 csapon 60 perc alatt hány hektoliter víz folyik ki?
    b. 1 csapon 1 óra alatt hány liter víz folyik ki?
    c. 7 csapon mennyi idő alatt folyik ki 1400 liter víz?
7. Amennyiben 7 almaszedő 7 másodperc alatt 7 almát szed le, hány almaszedő fog 100 almát 2 perc alatt leszedni?

5. FEJEZET

MÉRLEGMÓDSZER

A mérlegmódszerrel az egyenletekre és egyenletrendszerekre visszavezethető feladatokat oldjuk meg. Az elv lényege, hogy az egyenlőséget egy kiegyenlített mérleg helyettesíti, az egyenlőség két oldalán álló kifejezések helyett ezeknek megfelelő súlyok (tulajdonképpen súllyal rendelkező tárgyak) vannak a mérleg két serpenyőjén. A megoldáshoz elengedhetetlenül szükséges annak tisztázása, hogy a mérleg serpenyői között az egyensúly megmarad akkor,

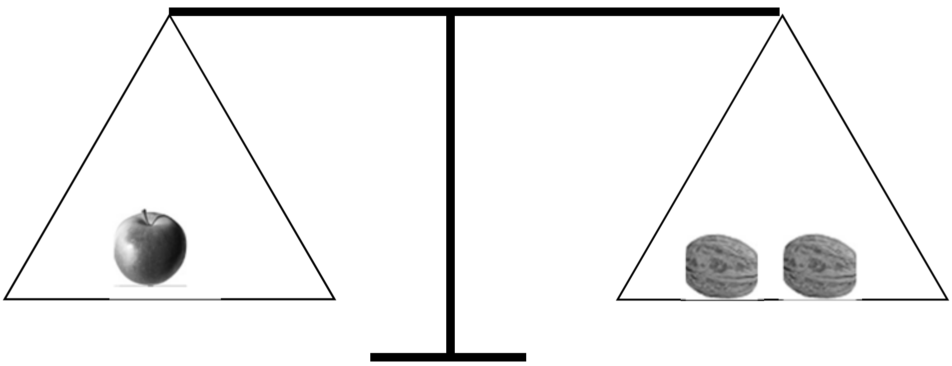
- ✓ ha minkét serpenyőjébe ugyanakkora súlyt helyezünk, illetve
- ✓ ha mindkét serpenyőből ugyanakkora súlyú tárgyat elveszünk.

Természetesen az elemi osztályban nincs tisztázva a súly fogalma, így a tárgyak tömegével fogunk dolgozni, kihangsúlyozva azt, hogy az azonos tárgyak (egy-egy alma, egy-egy tábla csokoládé, stb.) azonos tömegűek. Így a fenti megállapításokat úgy módosíthatjuk, hogy *a mérleg egyensúlya megmarad, ha ugyanannyi, megegyező tárgyat teszünk a serpenyő mindkét tányérjába, illetve ha az egyensúlyban lévő mérleg két tányérjából ugyanannyi megegyező tárgyat elveszünk.*

Megoldott feladatok

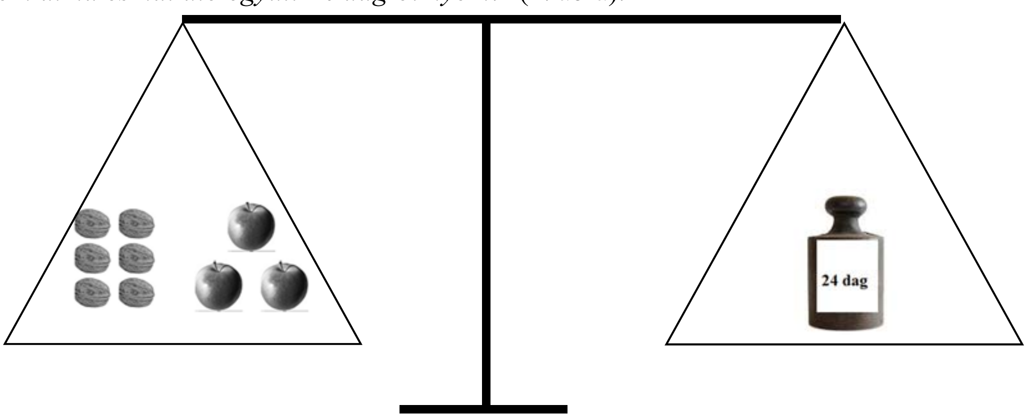
1. Egy kétkarú mérlegen egy almát két dió egyenlít ki. Három alma és hat dió együtt 24 *dag*-ot nyom. Adjuk meg egy-egy dió és alma *dag*-ban mért tömegét.

   „*… egy almát két dió egyenlít ki…*”(1. ábra).



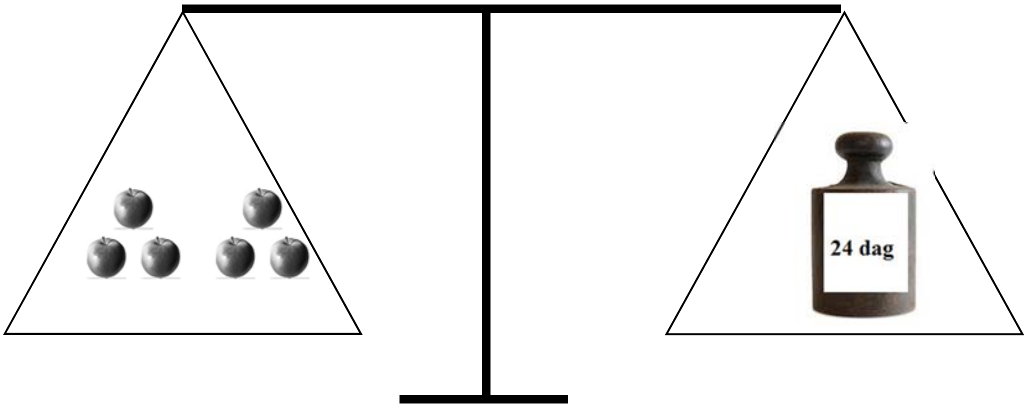
1. ábra

Fontos észrevétel, hogy az egyensúly nem változik, ha az almát két dióra cseréljük, vagy fordítva: két dió helyett egy almát helyezünk a serpenyőbe.
„Három alma és hat dió együtt 24 dag-ot nyom.” (2. ábra).



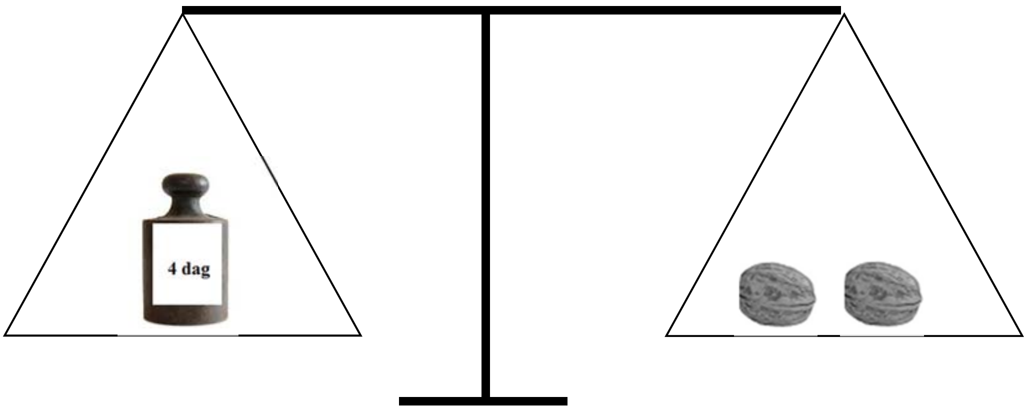
2. ábra

Figyelembe vesszük az első összefüggést, amely szerint két dió egy almával helyettesíthető:



3. ábra

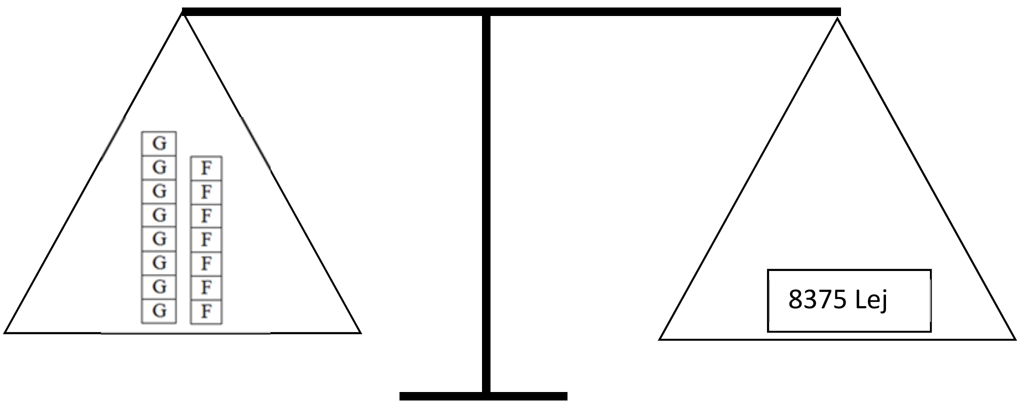
A mérleg egyik serpenyőjében 6 alma van, a másik serpenyőjében egy 24 dag mérősúly. Könnyen belátható, hogy amennyiben hat alma 24 dag úgy egy *alma 24:6 = 4 dag*.



4. ábra

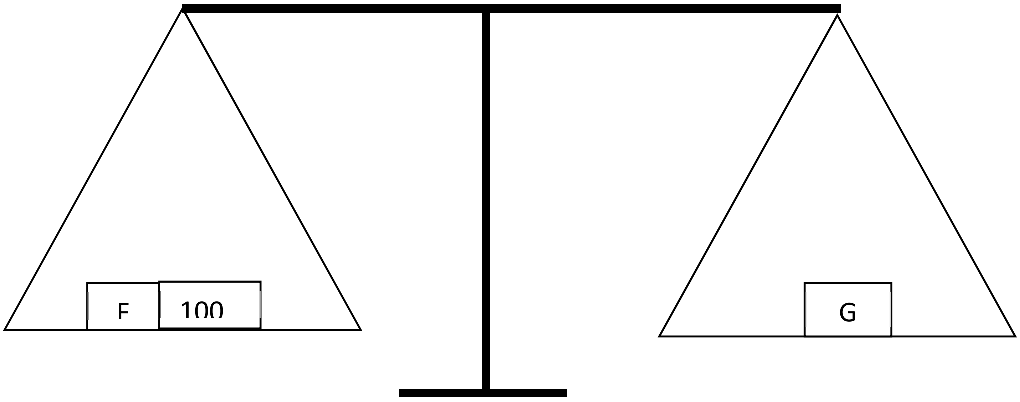
Az ábrából (4. ábra) következik, hogy egy *dió 4:2=2 dag*-t nyom.

2. Nyolc golyóstoll és hét füzet 8375 lejbe került. Tudjuk, hogy egy füzet 100 lejjel olcsóbb egy golyóstollnál. Mennyibe kerül egy golyóstoll? Hát egy füzet?
„Nyolc golyóstoll és hét füzet 8375 lejbe került"



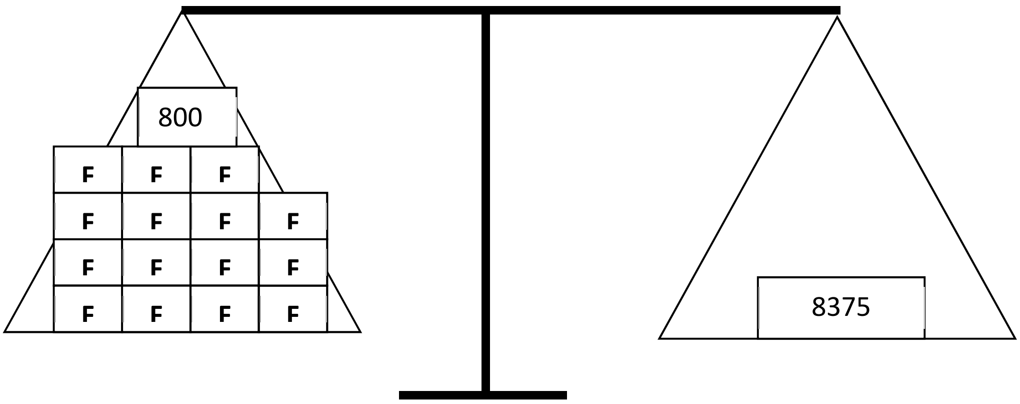
5. ábra

„egy füzet 100 lejjel olcsóbb egy golyóstollnál” – azaz egy füzet árához még száz lejt kell adjunk, hogy megkapjuk egy golyóstoll árát.



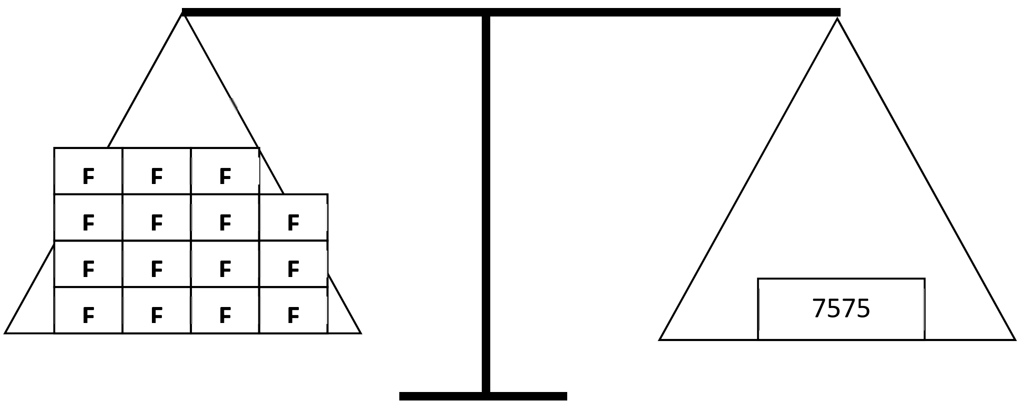
6. ábra

így a serpenyőben a golyóstoll helyettesíthető az ábra szerint egy füzet árával és még száz lejjel!



7. ábra

Belátható, hogy mindkét oldalról eltávolítható 800-800 lej, így az egyensúly a következőképpen alakul:



8. ábra

Tehát 15 füzet 7575 lejbe kerül, következik tehát, hogy egy füzet 7575:15 = 505 lejbe kerül. Miután *„egy füzet 100 lejjel olcsóbb egy golyóstollnál”*, következik, hogy egy golyóstoll ára: 505+100=605.□

Megjegyzés: a 6. fejezet, amelyben az összehasonlítás módszerét tárgyaljuk, ajánlott feladatai mérleg módszerrel is megoldhatók!

6. FEJEZET

AZ ÖSSZEHASONLÍTÁS MÓDSZERE

Az itt ismertetett feladatok jó része az

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszerrel írható le. Természetesen nem fogunk egyenleteket használni, de jó, ha a pedagógus tudja azt, hogy az összehasonlítás módszerével megoldható feladatok visszavezethetőek egy-egy fenti rendszerre. Egy adott egyenletrendszerből kiindulva új feladatok megírása is könnyűszerrel megtehető.

MEGOLDOTT FELADATOK

1. Három méter szövet és hat méter vászon 408 lejbe kerül, 7 m szövet és 12 m vászon ára együtt 918 lej. Hány lejt fizetünk 2 m szövet és 1 m vászon vásárlásakor?

Megoldás:
A feladat adatait egy táblázatba foglaljuk, a következőképpen:

1. táblázat

szövet [m]	*vászon* [m]	*ár* [lej]
3	6	408
7	12	918

Célunk az, hogy a *szövet* vagy *a vászon* oszlopokban, megfelelő műveletek elvégzése után, azonos *értékeket kapjunk*. Célozzuk meg az első oszlop elemei: úgy jutunk az azonos értékekhez, ha a teljes első sort 7-tel szorozzuk, míg a teljes második sort 3-mal szorozzuk.

2. táblázat

szövet [m]	*vászon* [m]	*ár* [lej]
$3\times \mathbf{7} = \mathbf{21}$	$6\times \mathbf{7} = \mathbf{42}$	$408\times \mathbf{7} = \mathbf{2856}$
$7\times \mathbf{3} = \mathbf{21}$	$12\times \mathbf{3} = \mathbf{36}$	$918\times \mathbf{3} = \mathbf{2754}$

Egy fontos módszertani pillanathoz érkeztünk: *összehasonlítjuk* az egyes oszlopok tartalmát, és észrevesszük, hogy a harmadik oszlopban fellelhető *árkülönbség* a *vászon* oszlopban megfigyelhető *mennyiségkülönbségből adódik*, hiszen mindkét esetben *ugyanannyi szövetmennyiség* vesz részt az ár kialakításában, vagyis a **2856 – 2754 = 102** lej árkülönbség azért jelentkezik, mert **42 - 36 = 6 m**-rel több vászon van a második esetben, ugyanannyi szövet mellett. Másképpen fogalmazva *6 m vászon 102 lejbe kerül*. Így már könnyű megállapítani, hogy *1 m vászon* **102 : 6 = 17** *lejbe kerül*.

A továbbiakban, visszatérve az eredeti táblázathoz, a *vászon* oszlopban szeretnénk azonos értékeket kapni. Könnyen belátható, mit is kell tennünk:

3. *táblázat*

szövet [m]	*vászon* [m]	*ár* [lej]
$3\times \mathbf{2} = \mathbf{6}$	$6\times \mathbf{2} = \mathbf{12}$	$408\times \mathbf{2} = \mathbf{816}$
7	12	918

Megállapítjuk, hogy 7 – 6 = 1 m szövet 918 - 816=102 lej árkülönbséget okoz, azaz *1 m szövet ára 102 lej*.

2. 4 vonalzó, 7 körző és 6 szögmérő összesen 298 lej, 7 vonalzó, 4 körző és 5 szögmérő összesen 219 lej és 1 vonalzó, 1 körző és 15 szögmérő összesen 187 lej. Mennyibe kerül 1 vonalzó, 1 körző és 1 szögmérő külön-külön?

Megoldás:
A feladat adatait egy táblázatba összegezzük:

4. táblázat

vonalzó	*körző*	*szögmérő*	*ár*
4	7	6	298
7	4	5	219
1	1	15	187

Továbbra is az a célunk, hogy az első oszlop celláiban azonos értékeket állítsunk elő. Tekintsük az első két sort:

5. táblázat

vonalzó	*körző*	*szögmérő*	*ár*
4	7	6	298
7	4	5	219

Megállapítjuk, hogy az első sort 7-tel a másodikat 4-gyel szorozva, az első oszlop értékei azonosak lesznek, tehát:

6. táblázat

vonalzó	*körző*	*szögmérő*	*ár*
$4\times \mathbf{7} = \mathbf{28}$	$7\times \mathbf{7} = \mathbf{49}$	$6\times \mathbf{7} = \mathbf{42}$	$298\times \mathbf{7} = \mathbf{2086}$
$7\times \mathbf{4} = \mathbf{28}$	$4\times \mathbf{4} = \mathbf{16}$	$5\times \mathbf{4} = \mathbf{20}$	$219\times \mathbf{4} = \mathbf{876}$

Megállapítjuk, hogy a **2086 – 876 = 1210** lejes árkülönbség azért jelent meg, mivel az első esetben **49 – 16 = 33** körzővel illetve **42 – 20 = 22** szögmérővel többet vettünk, így kijelenthetjük, hogy 33 körző és 22 szögmérő ára 1210 lej (1. következtetés).

Visszatérve az 1. táblázathoz, tekintsük a második és harmadik sorokat:

7. táblázat

vonalzó	*körző*	*szögmérő*	*ár*
7	4	5	219
1	1	15	187

Az első oszlop elemei azonosak lesznek, ha a második sort 7-tel szorozzuk:

8. táblázat

vonalzó	*körző*	*szögmérő*	*ár*
7	4	5	219
1$\times \mathbf{7} = \mathbf{7}$	1$\times \mathbf{7} = \mathbf{7}$	15$\times \mathbf{7} = \mathbf{105}$	187$\times \mathbf{7} = \mathbf{1309}$

Észrevesszük, hogy a második alkalommal **7 - 4 = 3**-mal több körzőt és **105 – 5 = 100** szögmérőt vásároltunk, ezért **1309 - 219 = 1090**-nel többet fizettünk. Mondhatjuk azt is, hogy 3 körző és 100 szögmérő együtt 1090 lejbe kerül (2. következtetés).
Az első és második következtetésből származó adatokat egy új táblázatba foglaljuk:

9. táblázat

körző	*szögmérő*	*ár*
33	22	1210
3	100	1090

Célunk továbbra is az, hogy az első oszlop elemei azonosak legyenek, így a második sort 11-zel szorozzuk:

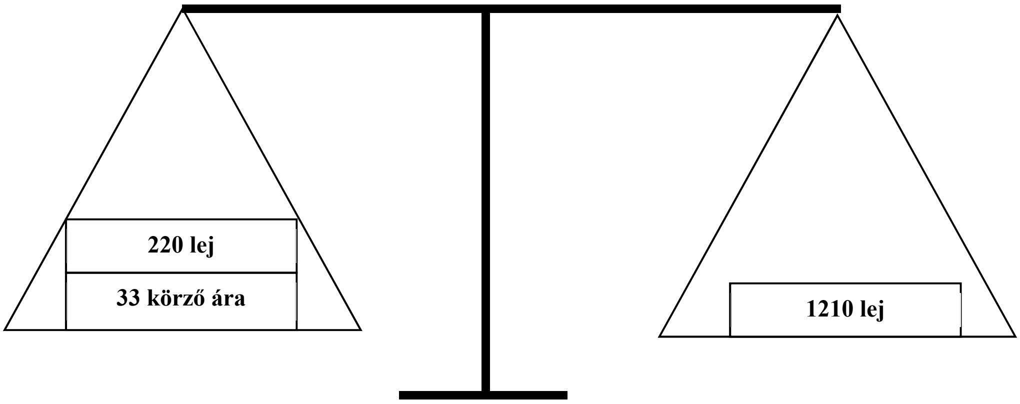
10. táblázat

körző	*szögmérő*	*ár*
33	22	1210
3$\times \mathbf{11} = \mathbf{33}$	100$\times \mathbf{11} = \mathbf{1100}$	1090$\times \mathbf{11} = \mathbf{11990}$

A táblázat adatai alapján a **11990 − 1210 = 10780** lejes árkülönbség az **1100 − 22 = 1078** darab szögmérőnek tulajdonítható, azaz *10780 szögmérő ára 1078 lej*. Következésképpen egy szögmérő ára 10780:1078 = 10 lej.

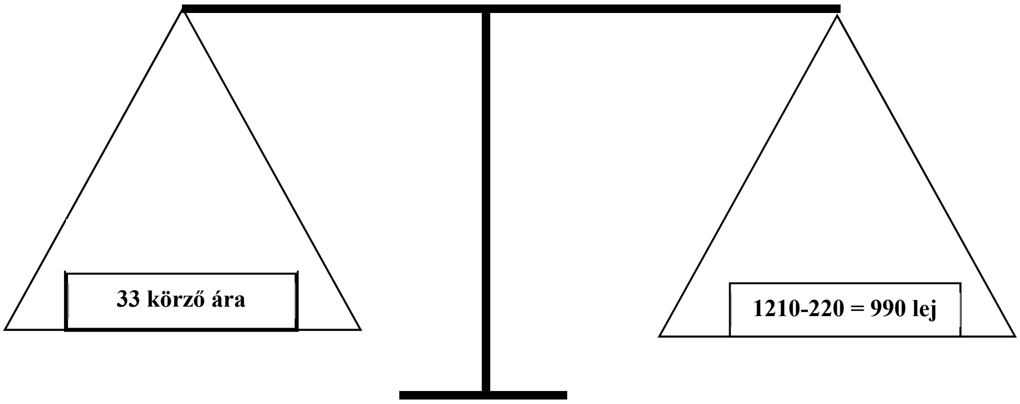
A *9. táblázat* első sorát a következőképpen olvashatjuk ki:

„*33 körző ára meg 22 × 10 =220 lej együtt 1210 lej*”. Módszertani szempontból felmerülhet a kérdés, hogy érdemes-e a *9. táblázat* második oszlopának elemeit megfelelő szorzással azonos értékekre állítani. Az olvasót bíztatjuk erre, mi viszont a mérleg módszernél tanultakat fogjuk felhasználni a körző árának meghatározására.



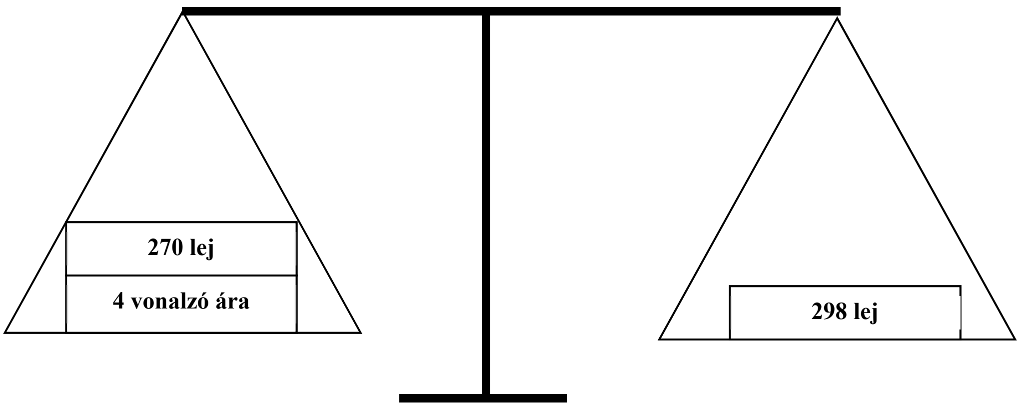
1. ábra

Amennyiben a mérleg mindkét tányérjáról elveszünk 220 lejt, úgy az egyenlőség megmarad:



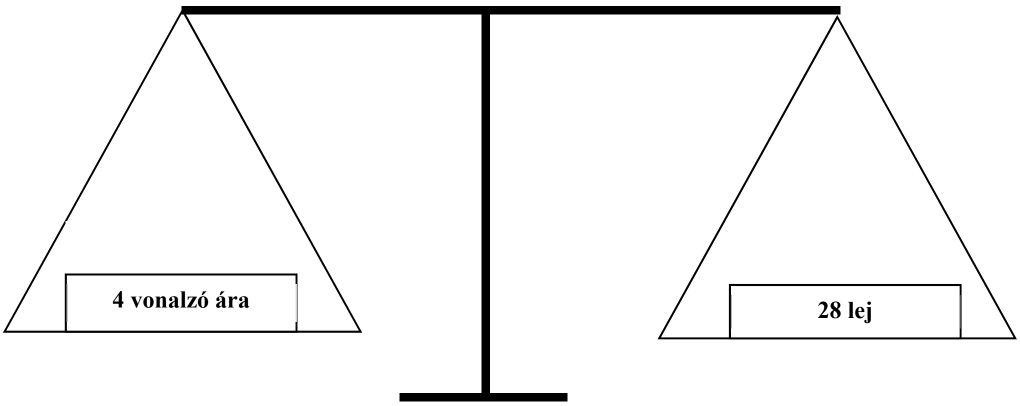
2. ábra

A 2. ábra alapján megállapítható, hogy egy körző ára 990: 33 = 30 lej.
Tudva azt, hogy egy szögmérő 10 lej és egy körző 30 lej, az 1. táblázat első sorát a következőképpen olvassuk:
„*4 vonalzó ára meg 7 körző ára (7* $\times 30 = 210$*) meg 6 szögmérő ára (6* $\times 10 = 60$*) összesen 298 lej*”



3. **ábra**

A 4. ábrát megfigyelve következik, hogy négy vonalzó ára**:**



4. ábra

Tehát: a szögmérő ára 10 lej, a körző ára 30 lej, a vonalzó ára 7 lej.

A következő feladatot leíró egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x = b_2y + c_2 \end{cases}$$

3. Három ceruza és 6 filctoll 114 lejbe kerül. Mennyibe kerül egy ceruza és egy filctoll, ha a filctoll ára négy lejjel több a ceruza áránál (Megfigyelhető, hogy esetünkben $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 4$).

Megoldás:
A feladat adatait:

ceruza	*filctoll*	*ár*
3	6	114

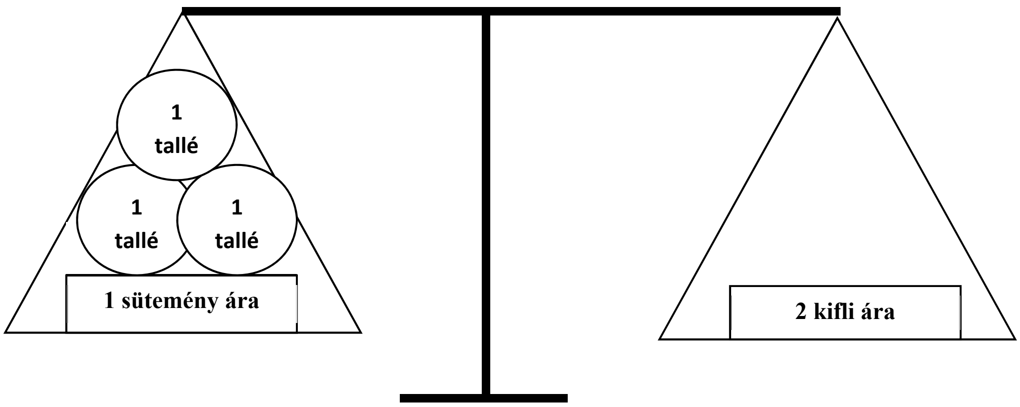
Tekintsük a feladat második információját, mely szerint „*a filctoll ára négy lejjel több a ceruza áránál*”. Ebből következik, hogy *egy filctoll ára helyettesíthető egy ceruza árával és még négy lejjel*. Tehát 6 filctoll hat ceruza árával és még $6\times 4 = 24$ lejjel.
Olvassuk el a feladatot a fentiek figyelembevételével:
„*Három ceruza ára meg hat ceruza ára meg 24 lej az 114 lej...*” Könnyen belátható, hogy három ceruza meg hat ceruza az $114 - 24 = 90$ lej. Vagyis 9 ceruza az 90 lej, tehát egy ceruza ára 90 : 9 = 10 lej, így a filctoll ára 10 + 4 = 14 lej.

ceruza	*ár*
3 + 6 = 9	114 − 24=90
1	90:9=10

4. Három kifli és 4 sütemény ára 43 tallér. Egy sütemény ára és még három tallér két kiflit ér. Mennyibe kerül öt kifli és öt sütemény?

Megoldás:

kifli	*sütemény*	*ár*
3	4	43

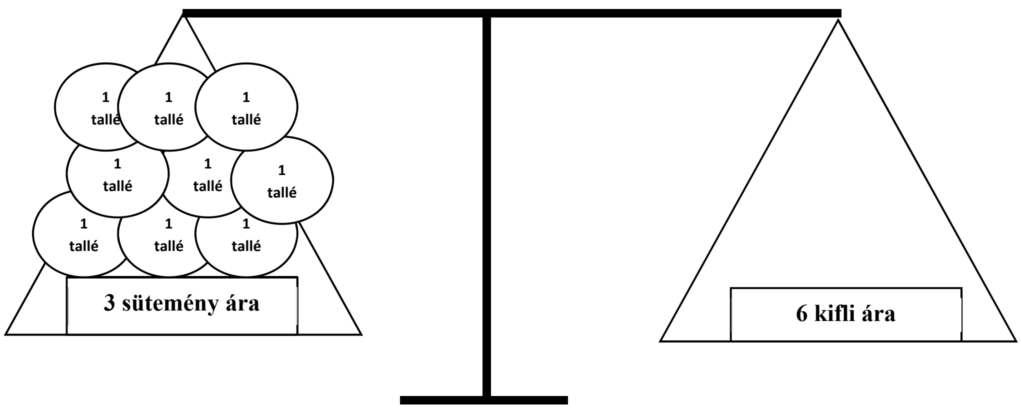


5. ábra

A táblázat adatait *megkétszerezzük*:

kifli	*sütemény*	*ár*
$3\times \mathbf{2} = \mathbf{6}$	$4\times \mathbf{2} = \mathbf{8}$	$43\times \mathbf{2} = \mathbf{86}$

A mérleg serpenyőinek tartalmát *megháromszorozzuk*. Az egyensúly természetesen megmarad.



6. ábra

A *megkétszerezést* illetve *megháromszorozást* azért vezettük be, hogy mindkét esetben *hat-hat kifli ára* szerepeljen.
Ezek után olvassuk ki a táblázat adatait:
„*Hat kifli és nyolc sütemény 86 tallérba kerül.*”

A mérleg-ábra adatai szerint:
„*Három sütemény ára és még kilenc tallér annyi, mint hat kifli ára*”. Egyértelmű, hogy az első mondatban a „*hat kifli ára*” helyettesíthető „*három sütemény ára és még kilenc tallér*”-ral. Az első mondat a következőképpen módosul: „*Három sütemény ára meg kilenc tallér meg nyolc sütemény ára 86 tallér*”.

Innen következik, hogy:

Sütemény	Ár
$3 + 8 = 11$	86-9=77
11:11=**1**	77:11=**7**

Tehát egy sütemény ára 7 tallér. Ezek szerint két kifli ára 7 + 3 = 10 tallér. Innen következik, hogy egy kifli ára 10:2=5 tallér. Végül: öt kifli és öt sütemény ára: 5 × 5 + 7 × 5 = 60 tallér.

5. Egy színházjegy kétszer annyiba kerül, mint egy mozijegy. Öt mozijegyért és 7 színházjegyért összesen 95 lejt fizettünk. Mennyibe kerül egy mozijegy? Hát egy színházjegy?
Megoldás:
Az „*Egy színházjegy kétszer annyiba kerül, mint egy mozijegy*.” mondatból következik, hogy egy színházjegy ára két mozijegy árával helyettesíthető. Azaz: „*Öt mozijegyért és 7 színházjegyért összesen 95 lejt fizettünk*” állítás azonos az „*Öt mozijegyért és 7*$\times 2 = 14$ *mozijegyért összesen 95 lejt fizettünk*” állítással. Következik tehát, hogy 19 mozijegy 95 lejbe került, tehát *egy mozijegy* 95:19 = *5 lejbe* került. Két mozijegy ára = *2* $\times 5 = 10$ *lejbe* kerül, ami *egy színházjegy* árának felel meg.

mozijegy	*szinházjegy*	*ár*
5	7	95
5+$\mathbf{7} \times \mathbf{2} = 5 + \mathbf{14} = 19$	-	95
19 : 19 = **1**		95:19 = **5**

KITŰZÖTT FELADATOK

1. 12 pohár és 10 tányér 106 lejbe kerül. 15 pohár és 25 tányér 220 lejbe kerül. Hány lej egy pohár és egy tányér külön-külön?

2. 17 liszteszsák és 26 krumpliszsák összesen 2764 kg-t, 17 liszteszsák és 35 krumpliszsák összesen 3250 kg-t nyom. Hány kg akkor egy liszteszsák és hány kg egy krumpliszsák?

3. 6 számítógép képernyő és 5 nyomtató együtt 4000 lej, 2 képernyő és 7 nyomtató együtt 2720 lej. Mennyibe kerül együtt 1 képernyő és 1 nyomtató?

4. 4 vonalzó, 7 körző és 6 szögmérő összesen 325 lej, 7 vonalzó, 4 körző és 5 szögmérő összesen 335 lej és 1 vonalzó, 1 körző és 15 szögmérő összesen 340 lej Mennyibe kerül 1 vonalzó, 1 körző és 1 szögmérő külön-külön?

5. Egy ceruza, 3 füzet és 7 vonalzó együtt 169 lej, és 4 ceruza, 3 füzet és 1 vonalzó együtt 91 lej. Mennyibe kerül együtt egy ceruza, egy füzet és egy vonalzó együtt?

6. Egy cukrászdában egy gyermek vásárolt 4 süteményt és 6 üdítőt 28 lejért. Más alkalommal 4 süteményt és 8 üdítőt 32 lejért. Hány lej egy sütemény és egy üdítő külön-külön?

7. 5 zsák búza és 4 zsák kukorica össztömege 320 kg, míg 10 zsák búza és 3 zsák kukorica össztömege 490 kg. Hány kg egy zsák búza, illetve egy zsák kukorica?

8. Három öltöny és 4 kabát megvarrásához 19 m szövet szükséges, 3 öltöny és 6 kabát varrásához pedig 24 m szövet. Hány m szövet szükséges 6 öltöny és 3 kabát megvarrásához?

9. Egy könyvesboltban összesen 3757 tankönyvet, verseskötetet, atlaszt és füzetet adtak el. 6 tankönyv ára megegyezik 9 verseskötetével, 7 tankönyv ára annyi, mint 10 atlasz és 3 tankönyv ára megfelel 4 füzetének. Hány tankönyvet, verseskötetet, atlaszt és füzetet adtak el külön-külön, ha mindhárom típusú áruért ugyanannyi pénzt fizettek.

10. 4 füzet és 3 golyóstoll 48 lejbe kerül, 3 golyóstoll és 7 füzet 75 lejbe kerül. Hány lej egy füzet és hány lej egy golyóstoll?

11. 4 fiú és 6 lány 288 virágot ültetett, 9 fiú és 6 lány 468 virágot ültetett. Hány virágot ültetett 8 lány, ha mindenik lány ugyanannyi virágot, és a fiúk is egyenlő számú virágot ültettek?

12. 6 televízió és 8 mosógép 11800 lejbe kerül, egy televízió és egy mosógép pedig 1600 lejbe. Hány lej egy televízió? Hát egy mosógép?

13. Öt személygépkocsi és 3 mikrobusz 51 személyt szállít. Ha egy mikro busszal 4-szer több személyt szállíthatnak, mint egy személygépkocsival, számítsátok ki, hogy:

a) hány személyes egy mikrobusz,
b) hány személyt szállíthatnak 9 gépkocsi és 4 mikrobusz segítségével!

14. Egy a természetes szám és egy b természetes szám kétszeresének összege 108. Ha az első szám 7-szer nagyobb, mint a második szám, számítsátok ki a számokat!

15. Egy láda alma és öt láda narancs tömege 182 kg, 4 láda alma és 5 láda narancs pedig 263 kg. Mennyi a tömege 3 láda almának?

16. Három ceruza ára megegyezik egy töltőtoll árával. Egy ceruza és egy töltőtoll 28 lejbe kerül, és 15 töltőtoll ugyanannyiba kerül, mint 9 könyv. Számítsátok ki, hogy mennyibe kerül egy ceruza, egy töltőtoll és egy könyv!

17. Egy alma és egy körte együtt 70 Ft-ba, egy alma és egy barack együtt 80 Ft-ba, egy körte és egy barack együtt 90 Ft-ba kerül. Hány forintba kerül 5 alma?

18. Kutya kerget nyulat. A kutya és a nyúl közötti távolság 40 kutyaugrás, hat nyúlugrás megfelel öt kutyaugrásnak, és egy időben a nyúl és a kutya is egyet-egyet ugranak. Hányat ugrik a kutya, amíg a nyulat eléri? Hát a nyúl?

19. Róka kerget nyulat. A nyúlnak 12 nyúlugrás előnye van. Hányat kell, hogy ugorjon a róka, hogy utolérje a nyulat? Tudjuk, hogy míg a róka 7-et ugrik, a nyúl 8-t. Öt rókaugrás megfelel hat nyúlugrásnak.

20. Róka kerget nyulat. A nyúlnak kilenc nyúlugrásnyi előnye van. Tíz nyúlugrás alatt a róka hetet ugrik. Két rókaugrás hossza megfelel öt nyúlugrás hosszának. Mennyit ugrik a róka, amíg eléri a nyulat? Hát a nyúl?

21. Agár kerget rókát. A távolság kettejük között kezdetben 60 rókaugrás. A róka kilencet ugrik, míg az agár hatot, három agárugrás hét rókaugrásnak felel meg. Hányat ugrik az agár, amíg eléri a rókát? Hát a róka?

22. Egy nyúl a kutyától 50 méterre van. Egy nyúlugrás 1 méter, egy kutyaugrás 2 méter hosszú. Miközben a kutya hármat ugrik, a nyúl négyet szökell. Hány ugrás után éri el a kutya a nyulat?

7. FEJEZET

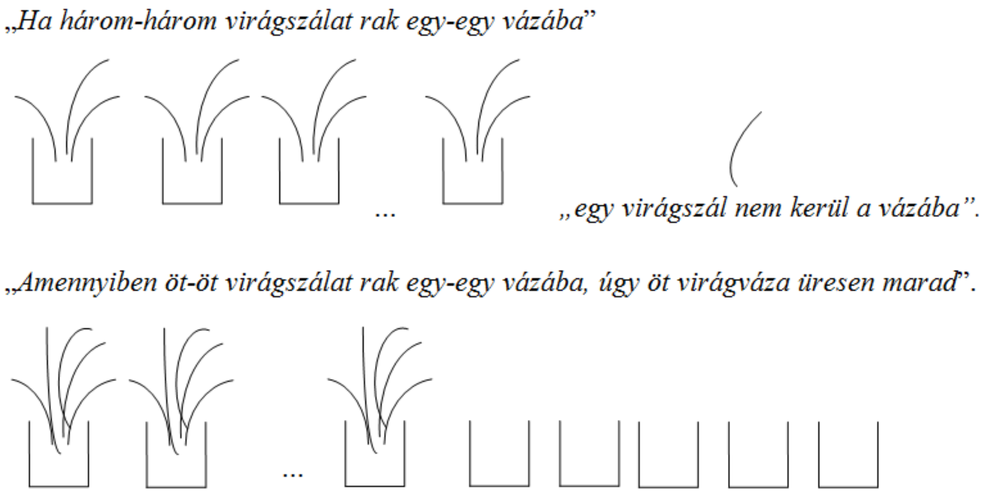
AZ ÁTRENDEZÉS MÓDSZERE

A feladattípus feladatai megoldhatóak a hipotézisek módszerével is. Néhány átrendezéses feladat megoldása ott megtekinthető. A feladat egy másik megoldást is kínál, lássunk néhány feladatot és próbáljuk meg egy új szemlélettel – az átrendezéssel – megoldani ezeket. A megoldási algoritmus lényege, hogy *visszarendezzük a feladatban szereplő második mondatban leírt állapotot az első mondat szerint leírt állapotba*, közben folyamatosan számoljuk azokat az objektumokat, amelyeket az első mondat szerint visszarendeztünk.

MEGOLDOTT FELADATOK

1. Anikó a virágjait vázákba rakosgatja. Ha három-három virágszálat rak egy-egy vázába, akkor egy virágszál nem kerül a vázába. Amennyiben öt-öt virágszálat rak egy-egy vázába, úgy öt virágváza üresen marad. Hány vázája és hány szál virágja van Anikónak?

Megoldás:



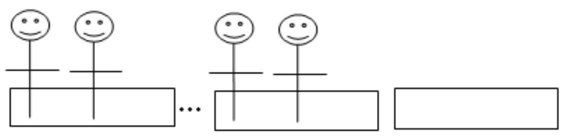
1. ábra

A feladat „középpontjához” érkeztünk: következhet az *átrendezés*! Visszahelyezünk annyi virágot az üresen maradt vázákba, hogy *az első állapot álljon elő*: minden vázában legyen három-három virág s maradjon egy szál virág. Ehhez két-két virágot veszünk ki a megrakott vázákból, összesen $5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$ virágot. A 16 szál virágot 16 : 2 = 8 vázából vettük ki és 5 vázába tettük be. Tehát 8 + 5 = 13 vázája van Anikónak és $13 \times 3 + 1 = 40$ szál virágja.□

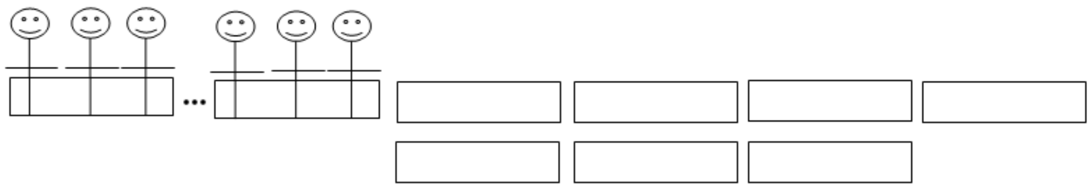
2. Egy osztályban kettesével ültetjük a tanulókat, így egy pad üresen marad. Amennyiben hármasával ültetjük a tanulókat úgy 7 pad marad üresen. Hány tanuló és hány pad van az osztályban?

Megoldás

„Egy osztályban kettesével ültetjük a tanulókat, így egy pad üresen marad".



„Amennyiben hármasával ültetjük a tanulókat úgy 7 pad üresen marad".



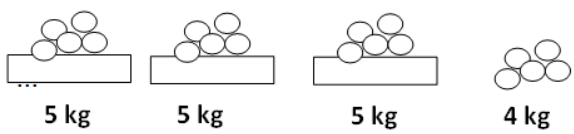
2. ábra

Visszarendezzük az osztályt: minden padból felállítunk egy-egy diákot és átültetjük az üres padokba, úgy, hogy hat padba két-két diák kerüljön. Ahhoz, hogy hat padot két-két diákkal megtöltsünk, $6 \times 2 = 12$ diákra van szükségünk. Ez a 12 diák 12 padból állt fel, így összesen az osztályban $12 + 7 = 19$ pad van és $18 \times 2 = 36$ diák.□

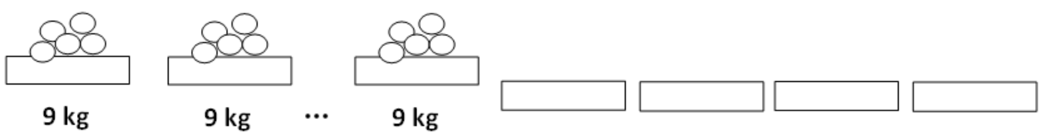
3. Cseresznyét szedtünk. A cseresznyét ládákba raktuk. Öt-öt kilót raktunk a ládákba, de így kimaradt a ládákból négy kiló. Amennyiben kilenc-kilenc kilót tettünk volna a ládákba, úgy négy láda üresen maradt volna. Mennyi cseresznyét szedetünk? Hány ládánk volt?

Megoldás:

„ Öt-öt kilót raktunk a ládákba, de így kimaradt a ládákból négy kiló."



„Amennyiben kilenc-kilenc kilót tettünk volna a ládákba, úgy négy láda üresen maradt volna."

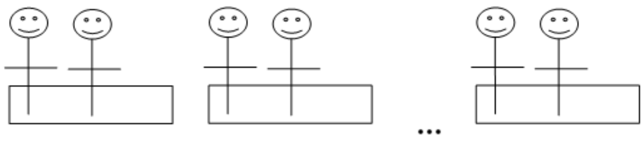


3. ábra

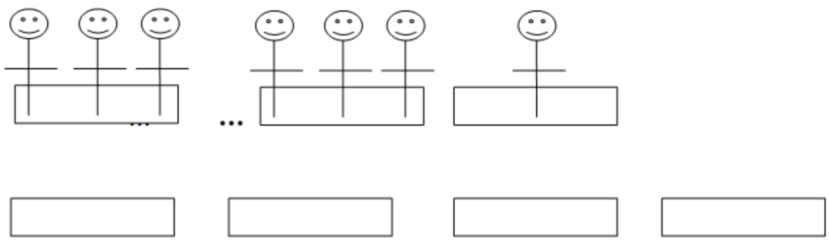
Visszarendezzük a ládákat az eredeti állapotba: négy-négy kiló cseresznyét elveszünk a kilencből és visszahelyezzük a ládákba. A négy láda esetében szükségünk van $5 \times 4 = 20$ kiló cseresznyére, amit $20 : 4 = 5$ ládából vettünk el. Belátható, hogy összesen $5 + 4 = 9$ ládánk van, illetve $9 \times 5 + 4 = 49$ kg cseresznyét szedtünk.□

4. Az osztály tanulóit kettesével ültetjük a padokba, és minden gyerek helyet kap. Ha hármasával szeretnénk ültetni a diákokat, akkor négy pad üresen maradna és egy diák egyedül ülne. Hány diák és hány pad van az osztályban?

„…kettessével ültetjük a padokba,…minden padban két gyerek ül…”



„…ha hármasával ültetnénk a diákokat, …négy pad üresen maradna és egy diák egyedül ülne.”



4. ábra

Visszarendezzük a gyerekeket az első mondat szerint. A három gyereket „tartalmazó” padokból egy-egy gyereket felállítunk, összesen $4 \times 2 + 1 = 9$ gyereket 9 padból és elhelyezzük őket: kettőt-kettőt az üres padokba, egyet az egyedül ülő gyerek mellé. A visszahelyezés öt padba történt, így $9 + 5 = 14$ pad van, és $14 \times 2 = 28$ gyerek van az osztályban.□

KITŰZÖTT FELADATOK

1. Anni és Panni virágot szedtek. Ha hármasával tennék a virágvázákba, akkor két virágnak nem jutna váza, így hét-hét szál virágot tesznek minden vázába, és két vázájuk marad üresen. Hány vázájuk volt a gyerekeknek? Hány szál virágot szedtek?

2. Ha a gyerekeket kettesével ültetjük a padokba, akkor 6 gyerek hely nélkül marad, ha hármasával ültetjük őket, akkor hat pad üresen marad. Hány gyerek és hány pad van az osztályban?

3. Egy sportklub sportolói felvonulnak a városnapi ünnepségen. Ha kilencesével állnak akkor 10 sorral kisebb lesz a menetoszlop mintha hetesével állnának. Hány sportoló vonult fel a városnapokon?

4. Almaszedés közben a gyerekek megfigyelték, hogy amennyiben 10 kg almát csomagolnának egy ládába, úgy 5 kg alma becsomagolatlan maradna, viszont ha 13 kg almát csomagolnának a ládákba, úgy négy láda üresen maradna, és egy ládába pedig csak 4 kg alma jutna. Hány kg almát szedtek a gyerekek és hány láda állt a rendelkezésükre?

5. Jucikáék költöznek, össze kell csomagolni a játékokat. Amennyiben Jucika 4-4 babát csomagol be a rendelkezésre álló ládákba, úgy három baba kimaradna azokból. Ha 5-5 babát rakna a ládákba, egy ládába nem kerülne baba, egybe pedig csak kettő. Hány ládája és hány babája van Jucikának?

6. Ferkó matek feladatokat szeretne megoldani bizonyos határidőre. Ha 10 feladatot oldana meg naponta, akkor 7 feladat kimaradna, ha 13 feladatot oldana meg naponta, akkor meg két szabad napja maradna. Hány napja van Ferkónak a feladatok megoldására? Hány feladatot kell, hogy megoldjon Ferkó?

7. Ha a virágokat hármasával teszik vázákba, megmarad 6 szál virág. Ha négyesével teszik a vázákba, 2 váza marad üresen. Hány váza és hány szál virág van?

8. Egy osztályteremben a tanulók kettesével ülnek a padokban, de még így is üresen marad egy pad. Egyszer egy előadás alkalmával a tanító nénivel együtt hármasával ültek be a padokba, így 6 padot tudtak felszabadítani. Hány tanuló járt az osztályba, és hány pad volt a teremben?

9. Egy osztályteremben, ha a tanulók kettesével ülnek be a padokba, 9 tanulónak nem jut hely. Ha hármasával ülnek a padokba, akkor 7 pad üresen marad, és egy padban egy tanuló fog ülni. Hány tanuló és hány pad van?

10. Andrea házi feladatot kapott, amit egy bizonyos nap után kell, hogy bemutasson az iskolában. Úgy számolja, hogy ha 8 feladatot oldana meg mindennap, akkor 4 feladat megoldatlan maradna, így elhatározza, hogy 11 feladatot fog megoldani, így két szabad nap marad és egy nap csak egy feladatot kell megoldania. Hány feladatot oldott meg Andrea, és hány nap alatt oldotta meg ezeket?

11. A gyerekek között csokis bonbonokat osztunk szét. Észrevesszük, hogy ha mindegyik gyerek 4-4 bonbont kapna, úgy 4 gyerek nem kapna semmit, így mindegyiknek három csokis bonbont adunk, és így megmarad még 8 bonbon. Hány bonbonunk volt eredetileg? Hány gyerek van az osztályban?

12. Kettesével ültetjük a gyerekeket az osztályban, így *három* üres padunk marad. Ha hármasával ültetnénk őket, úgy *hét padunk* maradna üresen. Hány gyerek és hány pad van az osztályban?

13. Kettesével ültetjük a gyerekeket az osztályban, így három gyereknek nem jut hely. Ha hármasával ültetnénk őket, úgy *négy padunk* maradna üresen. Hány gyerek és hány pad van az osztályban?

14. Ha a gyerekeket kettesével ültetjük a padokba, akkor nyolc gyereknek *nem jut ülőhely*, így hármasával ültetjük őket és akkor marad *három üres pad*. Hány gyerek és hány pad van az osztályban?

15. Egy osztályban, kettesével ültetve a gyerekeket, egy gyereknek *nem jut pad*. Hármasával ültetve a gyerekeket, *négy pad üresen* maradna, és egy gyerek egyedül ülne. Hány gyerek és hány pad van az osztályban?

16. Egy ünnepélyre 90 gyereket vártunk, és 450 süteményt vettünk. Több gyerek érkezett, így minden gyerek két süteménnyel kevesebbet kapott az eltervezettnél. Hány gyerek jött összesen az ünnepségre?

17. Ha egy osztályteremben a diákokat kettesével ültetnénk, úgy 9 tanuló állva maradna. Így hármasával ültetjük őket és hét pad üresen marad. Hány tanuló és hány pad van az osztályban?

18. Ha egy osztályteremben a diákokat kettesével ültetnénk, úgy 7 tanuló állva maradna. Így hármasával ültetjük őket és öt pad üresen marad. Hány tanuló és hány pad van az osztályban?

19. Gyereknapon a tanító néni pralinéval kedveskedik a gyerekeknek. Ha minden gyereknek 2-2 pralinét adna, akkor még megmaradna 17 praliné. Amennyiben 3-3 pralinét adna a gyerekeknek, úgy 15 gyereknek 2-2 praliné maradna. Hány gyerek van az osztályban? Hány pralinét hozott a tanító néni?

20. A gyerekek kirándulni mentek. Éjszakára egy motelben szálltak meg. Ha két-két gyerek alszik egy-egy szobában, úgy öt szoba üresen marad, és egy gyerek egyedül alszik egy szobában. Ha még jön 39 gyerek a motelbe, és őket meg hármasával helyezik el az üresen maradt szobákban, úgy egy gyereknek nem jut hely. Hány gyerek volt eredetileg a motelben? Hány szoba van a motelben?

21. Tomi a vendégeit süteménnyel kínálja. Ha öt-öt süteményt juttatna egy-egy vendégnek, akkor két vendég sütemény nélkül maradna, ha pedig egy vendégnek négy süteményt juttatna, akkor 17 sütemény megmaradna. Hány süteménye és hány vendége volt Tominak?

22. Egy bizonyos mennyiségű paradicsomot ládákba csomagolunk. Ha 3-3 kg paradicsomot helyeznénk egy-egy ládába, akkor 52 kg paradicsom csomagolatlanul maradna, így 7-7 kg

paradicsomot helyezünk egy-egy ládába, és 4 ládánk üresen marad. Hány kg paradicsomunk és hány ládánk volt?

23. Ha egy osztály tanulói egyenként ülnek a padokba, 13 tanulónak nem lesz helye, ha kettesével ülnek a padokba, akkor 2 pad üresen marad. Hány tanuló és hány pad van az osztályban?

24. Anikó karkötőket készít. Ha minden karkötőhöz hét gyöngyöt használna, akkor öt gyöngyszem maradna meg, ha pedig tíz gyöngyöt használna, akkor három gyöngy maradna meg. Hány gyöngyszeme van Anikónak?

25. A tornaünnepélyen a sporttanárok zászlókat osztottak ki a gyerekek között. Ha minden gyerek három zászlót kapna, akkor három gyerek zászló nélkül maradna, így minden gyerek két zászlót kap, és megmarad hat zászló. Hány gyerek vett részt a tornaünnepélyen. Hány zászlója volt a sporttanároknak?

26. A gyerekeket a játszótérre vitte a tanító néni. A galiba a játszótéri hintáknál kezdődött. Ha a tanító néni egyesével ültette volna a gyerekeket a hintára, úgy az utolsó hintára két gyerek jutott volna. Így a tanító néni úgy döntött, hogy minden hintára két-két gyerek ül fel, így viszont négy hinta üresen maradt. Hány gyerek ment hintázni? Hány hinta volt a játszótéren?

27. Neve napjára nagymama süteményeket készített a vendégeknek. Ha minden vendégnek 3-3 süteményt tenne a tányérjára, akkor egy vendégnek nem jutna sütemény, így két-két sütit tesz minden tányérra, és ekkor megmarad még két sütije. Hányan voltak vendégek nagymamánál. Nagymama hány süteményt sütött?

8. FEJEZET

A TÉGLALAP MÓDSZERE

MOZGÁSSAL KAPCSOLATOS FELADATOK - KEVERÉKSZÁMÍTÁS

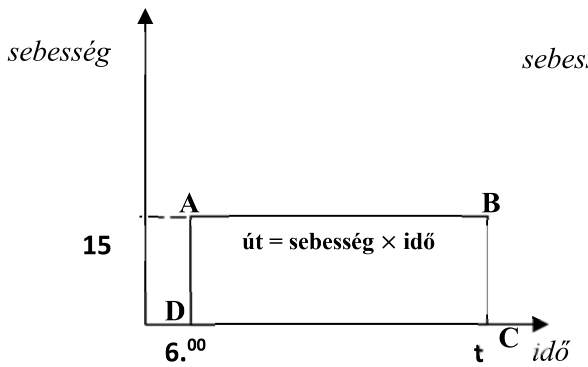
A téglalap módszer alkalmas mozgással kapcsolatos feladatok továbbá keverési feladatok megoldására. Mivel igen szemléletes, grafikus módszer, ajánlott az elemi osztályok tananyagában előforduló mozgásos feladatok megoldására, de magasabb osztályokban a keverékszámításos feladatok megoldásának is hatékony eszköze lehet a módszer.

Általában ha a feladatban két mennyiség szorzata szerepel, úgy ezt a szorzatot egy téglalappal, illetve annak területével szemléltethetjük.

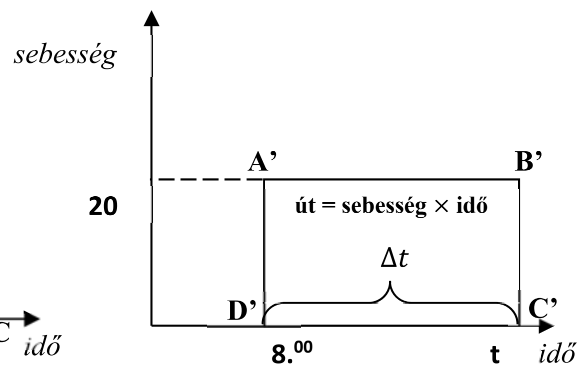
MEGOLDOTT FELADATOK

1. 6 órakor indul egy biciklizõ Hencidából Boncidába 15 km/h sebességgel. Egy másik biciklizõ szintén Hencidából indul Boncidába, de 8 órakor, és 20 km/h sebességgel. Hány órakor éri utol a második biciklis az elsõt? Hencidától hány kilométerre találkoznak?

Megoldás:



1. ábra



2. ábra

Miután a két biciklizõ Hencidából indult, könnyen belátható, hogy a találkozásig ugyanazt az utat járták be. Másképpen: mindkettõ azonos hosszúságú utat tett meg a találkozásig. A megtett út hossza szám szerint megegyezik az *ABCD* (1. ábra) illetve $A'B'C'D'$ téglalapok (2. ábra) területével, tehát felírhatjuk, hogy

$$T_{ABCD} = T_{A'B'C'D'},$$

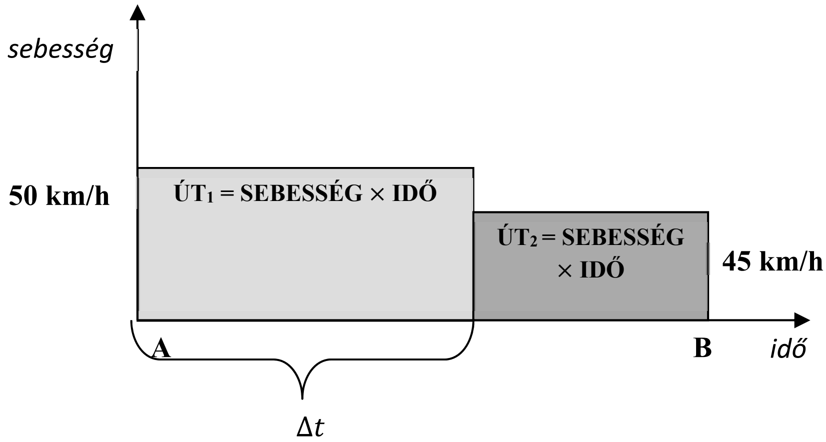
A továbbiakban jelöljük a második biciklista menetidejét Δt -szel (2. ábra). Miután észrevettük, hogy az elsõ biciklis 2 órával többet karikázott mind az elsõ, felírhatjuk, hogy:

$$(\Delta t + 2)15 = 20\Delta t.$$

Tehát: $5\Delta t = 30$, innen $\Delta t = 6$.
Tehát a második biciklis hat órát biciklizik, amíg utoléri az elsõ biciklist. Ekkor az órája 8 + 6 = 14 azaz déli 2 órát mutat. A találkozás *6·20=120* km-re történik Hencidától.□

2. Két kikötő, ***A*** és ***B***, egymástól 1520 km-re fekszik. A két kikötőből egyszerre indul egymás felé két hajó 50 km/h illetve 45 km/óra sebességgel. Hány óra múlva találkoznak? Az ***A*** kikötőtől hány km-re lesz a találkozás?

Megoldás:



3. ábra

Könnyen belátható, hogy az ábrázolt két téglalap területének megfelelő $ÚT_1$ és $ÚT_2$ összege pontosan 1520 km, továbbá, hogy a két kerékpáros egyenként Δt időt karikázik. Azt kapjuk, hogy:

$$50\Delta t + 45\Delta t = 1520.$$

Innen:

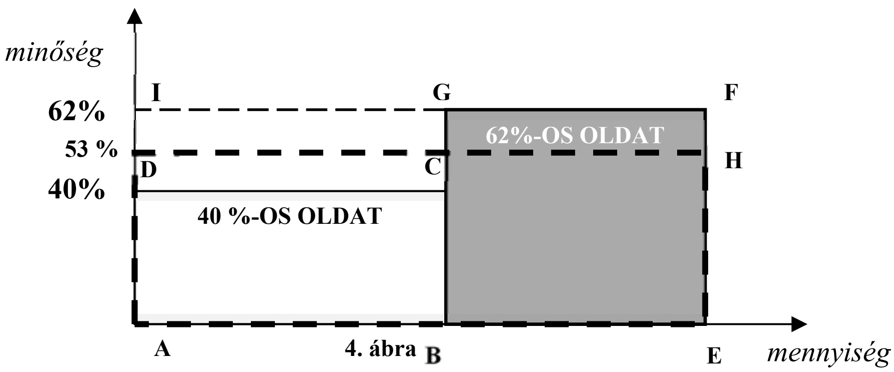
$$\Delta t = \frac{1520}{95} = 16.$$

Tehát a két hajó 16 óra múlva találkozik a nyílt tengeren, az ***A*** kikötőtől 50·16=800 km-re.□

3. Van egy 40%-os és egy 62%-os oldatunk. Mennyit kell összekeverni ezekből, hogy 5 kg 53%-os oldatot kapjunk?

Megoldás:

A keverékfeladatok lényeges, és könnyen belátható, kezdő megállapítása az, hogy az új elegy minősége szám szerint az elegyben résztvevő két komponens számszerinti minősége (koncentrációja, finomsága, ezüsttartalma, stb.) között helyezkedik el. Tehát a fenti szöveget figyelembe véve, az elegy koncentrációja nem lehet 40% alatt illetve 62% felett.



4. ábra

A 4. ábrán megfigyeljük, hogy:

a) Az ABCD téglalap az első oldatot jelöli: az AB szakasz hossza megfelel az oldatból vett mennyiségnek, az AD szakasz hossza megfelel az első oldat töménységének (40%).
b) A BEFG téglalap a 62% oldatot jelöli: a BE szakasz az oldatból vett mennyiséget jelenti, a BG szakasz megfelel a második oldat töménységének (62%).
c) Az elegyet az AEHI téglalap írja le: az AE szakasz az összmennyiséget jelöli (5kg), az AI szakasz hossza megfelel az új elegy töménységének.

Jelöljük az első elegyből vett mennyiséget *x*-szel. Megállapítjuk, hogy a tömegmegmaradás elve alapján:

$T_{AEHD} = T_{ABCD} + T_{BEFG}$. Ebből következik, hogy:

$$53 \cdot 5 = 40 \cdot x + 62 \cdot (5 - x).$$

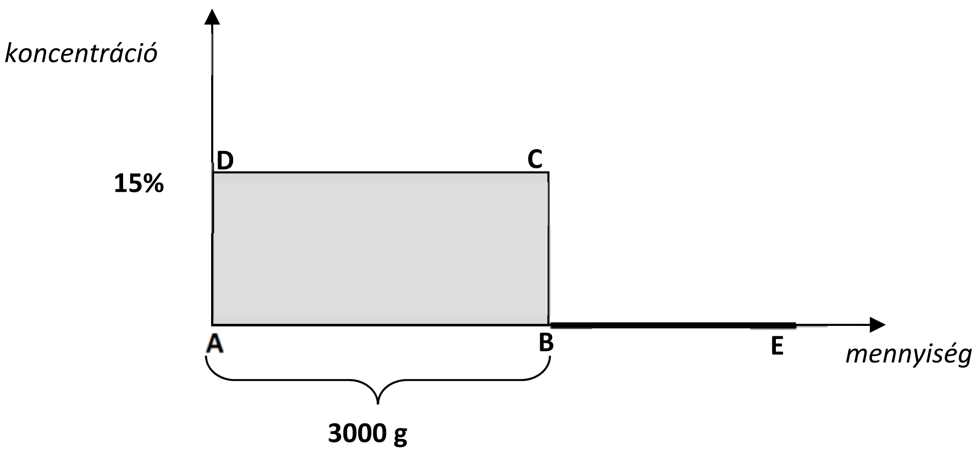
A számításokat elvégezve kapjuk, hogy x $\cong$ *2.05 kg* így $5 - x = 2.95\,kg$, tehát a 40% töménységű elegyből közelítőleg 2.05 kg kell vegyíteni a 62% eleggyel, amiből viszont 2.95 kg veszünk.

4. Egy sóoldat tömege 3000 g, töménysége 15%

a. Mennyi vizet kell belekeverni, hogy a töménysége 5 %-os legyen?
b. Mennyi sót kell belekeverni, hogy az oldat töménysége 20%-os legyen?

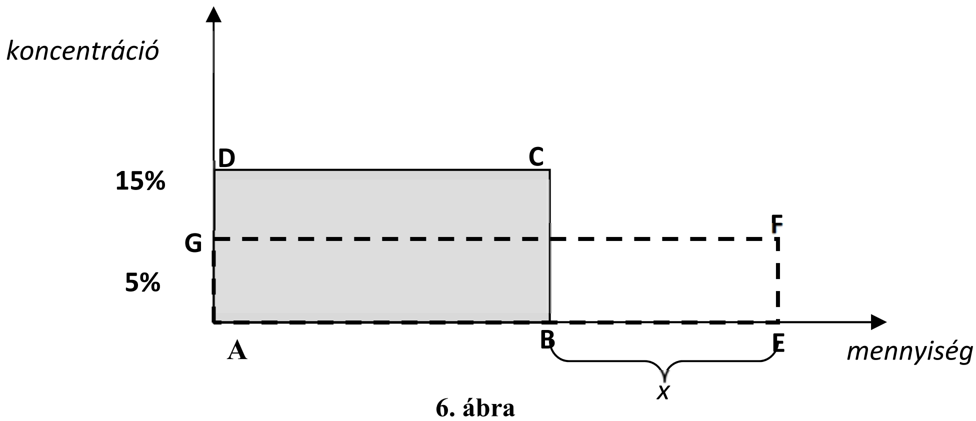
Megoldás:

a. Mennyi vizet kell belekeverni, hogy a töménysége 5 %-os legyen?



5. ábra

Az ABCD téglalap (5. ábra) az eredeti sóoldatot írja le: az AB oldal hossza megfelel az oldat tömegének, az AD oldal hossza megfelel a töménységének. A feladatot úgy is értelmezhetjük, hogy az eredeti téglalap AB oldalát a BE szakasz hosszával „megnyújtjuk", úgy, hogy közben a téglalap területe azonos marad. Megjegyezzük, hogy a BE szakasz hossza jelenti a tiszta víz tömegét. Miután ennek a sókoncetrációja nulla, így a szakasz „magassága" is nulla. Belátható, hogy ha a téglalap oldalát a nagyobb mennyiség irányába „megnyújtjuk", a téglalap magassága csökkenni fog. A „nyújtás" során a téglalap magassága az 5%-ra kell, hogy csökkenjen.



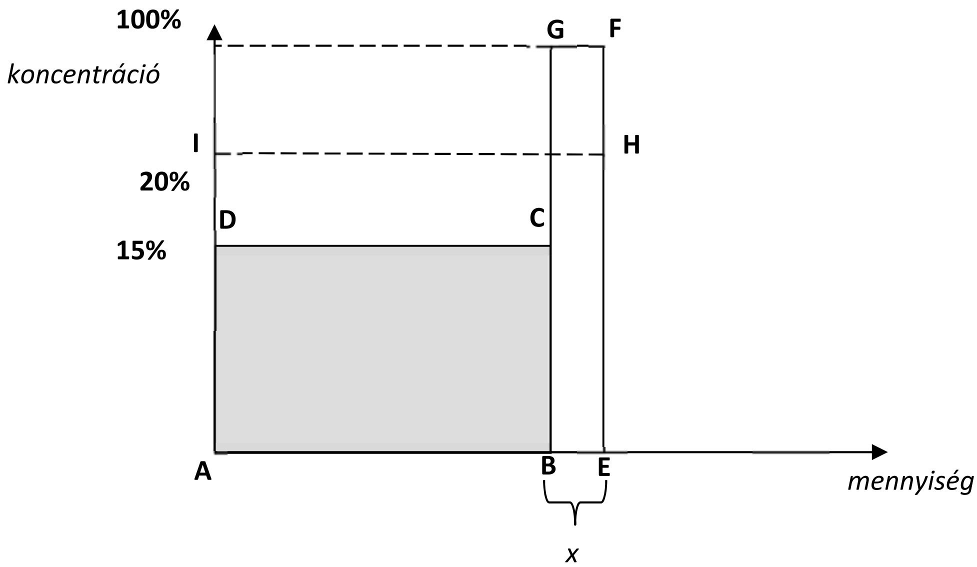
6. ábra

Az ABCD téglalapot x-hosszal nyújtottuk meg. A keletkezett AEFG téglalap írja le az új oldatot: az AE oldalhossz 3000 + x, az AG oldalhossz az új töménységet jelenti, ez 5% (6. ábra)! Az AEFG és ABCD téglalapok területe azonos, azaz:

$$(3000 + x) \cdot 5 = 3000 \cdot 15.$$

Innen, a számításokat elvégezve azt kapjuk, hogy x = 6000g, azaz a 15%-os sóoldathoz 6 liter tiszta vizet kell hozzáadni, hogy a kapott koncentráció 5% legyen.□

b. Mennyi sót kell belekeverni, hogy az oldat töménysége 20%-os legyen?



7. ábra

Az elegyhez hozzáadott sót a BEFG téglalap írja le: a BG oldal a só töménységet jelenti, ez 100%, a BE oldal pedig a hozzáadott só mennyiségét, amit x-szel jelöltük. A keletkező 20 %-os elegyet az AEHI téglalap írja le. A téglalap területe megegyezik az ABCD és BEFG téglalap területének összegével:

$$3000 \cdot 15 + 100 \cdot x = (3000 + x) \cdot 20.$$

Innen, a számításokat elvégezve kapjuk, hogy $x = 187{,}5$ g, azaz ennyi sót kell beleszórni az oldatba, hogy az 20% sóoldattá váljon (7. ábra). □

KITŰZÖTT FELADATOK

1. Egy jármű egy adott utat 60 km/h sebességgel tesz meg. Az út 1.5 órát tart. Mennyi idő alatt tenné meg az utat, ha 80 km/h sebességgel haladna?

2. Két helység, a távolság 45 km. Jelöljük a két helyiséget A-val és B-vel. A-ból egy biciklis indul B-be. Egy óra múlva egy motorbiciklis is indul A-ból B-be, és egy órával hamarabb ér célba, mint a biciklis. A motoros sebessége a biciklis sebességének háromszorosa. Milyen sebességgel közlekedett a biciklis?

3. Két jármű egyszerre indul el A városból B városba. Az első jármű 6 óra alatt teszi meg az utat A-ból B-be, míg a második 7 óra alatt teszi meg ugyanezt az utat. A két jármű, miután elérik B várost, megfordulnak és A-ba indulnak, ott megfordulnak és indulnak B-be, és így tovább. Egy adott pillanatban egyszerre érkeznek A-ba. Mennyi idő telt el az indulástól számítva?

4. Két jármű indul A-ból B-be. A távolság a két helység között 466 km. A második jármű az elsőhöz képest 2 órával később indul. A második jármű az elsőt az A várostól 272 km-re éri utol. Mekkora a sebessége a második járműnek?

5. Az A és B városokból indul egy-egy biciklis. Az első sebessége 8 km/h a második sebessége 10 km/h. Mennyi idő múlva találkoznak, ha tudjuk, hogy az A és B közötti utat a második biciklis 9 óra alatt teszi meg.

6. Egy csónakos a folyó folyási irányával megegyezően haladva 40 km-t 4 óra alatt tesz meg. A víz folyásával ellentétes irányba haladva, a 40 km-t 8 óra alatt teszi meg. Adjuk meg a folyó áramlási sebességét.

7. Egy jármű az A városból indul a B város fele, 60 km/h átlagsebességgel. Két óra múlva az A városból a B városba indul egy másik jármű, 75 km/h sebességgel. Mennyi idő múlva éri utol a második jármű az elsőt, és az A várostól hány km-re?

8. Két gyalogos egyszerre indul az A városból a B városba. Az első gyalogos sebessége 4 km/h, a második gyalogos sebessége 5 km/h. Az első gyalogos három órával többet megy, mint a második, míg a B városba ér. Mennyi idő alatt ért a B-be az első gyalogos? Hát a második? Mekkora az AB távolság?

9. Mennyi 20 fokos bort kell összetölteni 85 fokos szesszel, hogy tíz liter 35 fokos vermutot kapjunk?

10. 5 kg 18 karátos aranyat mennyi 14 karátos arannyal kell vegyíteni, hogy az eredmény 16 karátos arany legyen (A 24 karátos arany a tiszta arany, a 18 karátos arany tiszta arany tartalma 18/24).

9. FEJEZET

VERSENYFELADATOK

A továbbiakban néhány versenyfeladatot ajánlunk az olvasó figyelmébe. A feladatok válogatásakor elsőrendű szempont volt, hogy azok illeszkedjenek a matematika előadáson már tanult anyaghoz, továbbá kapcsolódjanak az ebben a könyvben leírtakhoz. A feladatokat a romániai matematika tantárgyversenyek feladataiból válogattuk. A versenyfeladatok 3. és 4. osztály számára készültek.

1. Határozzuk meg az $\overline{xyz}$ számot, ha $\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}$!

2. Határozzuk meg a sorozat következő három elemét: 3, 7, 13, 27, 53, 107, ⋯!

3. H Határozzuk meg a értékét, ha $(a+1) + (a+3) + (a+5) + \cdots + (a+101) = 2703$!
   Útmutatás: Észrevesszük, hogy: $1 = 1$
   $3 = 1 + 1\cdot 2$
   $5 = 1 + 2\cdot 2$
   …
   $101=1+50\cdot 2$.
   Innen kapjuk, hogy $51\cdot a+2\cdot(1 + 2 + \cdots + 50) = 2703$.

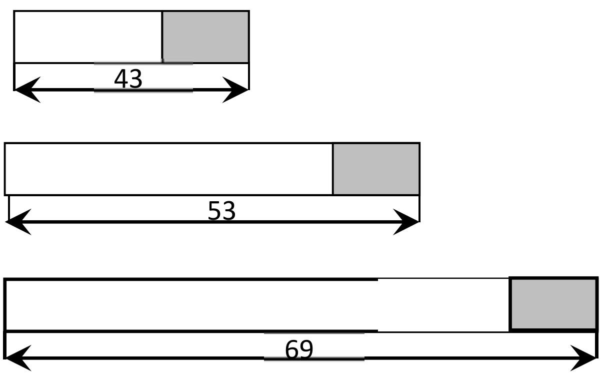
4. H Egy osztásban az osztandó egy $\overline{xyzt}$ alakú szám, az osztó pedig egy $\overline{ab}$ alakú szám. Ha tudjuk, hogy $a + b = 9$ továbbá, hogy az osztás maradéka 89, adjuk meg az osztást!
5.
6. H *Útmutatás*:
   Az $a + b = 9$ egyenlőségből ⇒ $\overline{ab} \in \{90, 81, 72, ...\}$, de miután a maradék 89, az osztó biztosan 90. A továbbiakban keressük azt a $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre igaz, hogy $\overline{xyzt} = k \cdot 90 + 89$. Azt kapjuk, hogy $k \in \{11, 12, \cdots 110\}$, így $\overline{xyzt} \in \{1079,\ 1169,\ 1259, \cdots, 9989\}$.

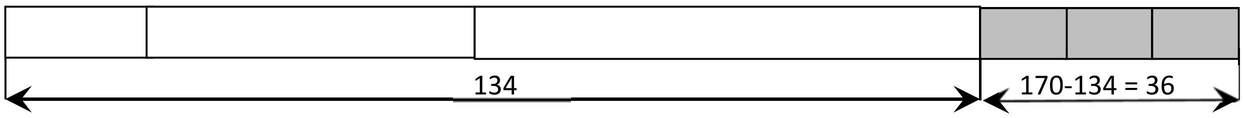
7. Egy négyjegyű szám számjegyeinek összege 36. Határozzuk meg a következő szám számjegyeinek összegét!

8. Egy nyolc méteres deszkát fél méteres darabokba vágunk. Hány vágás szükséges, ha egyszerre csak egy deszkavastagságot vághatunk el?

9. Három szám összege 134. Ha mindhárom számhoz hozzáadjuk ugyanazt a számot a 48, 53 és 69 számokat kapjuk. Adjuk meg a három számot!

   Útmutatás :





8. Gyereknapon az osztály tanulói 3-3 bonbont és 2-2 almát kaptak. Eredetileg, az elosztás előtt, kétszer annyi szem bonbon volt, mint alma. Miután minden tanuló megkapta a bonbonokat és az almákat, maradt még 33 bonbon es 5 alma. Hány tanuló van az osztályban?

9. Egy könyvnek 165 számozott oldala van. Hány számjegyet használtunk fel a könyv számozására?
Útmutatás:
 1-től 9-ig: 9 szám, ugyanannyi számjegy
 10-től 99-ig: $9 \times 10 = 90$ szám, $90 \times 2 = 180$ számjegy
 100-tól 165-ig: 66 szám, $66 \times 3 = 198$ számjegy

10. Egy gyereksort a következőképpen rendeztünk: a sor két végén egy-egy fiú, továbbá minden két fiú közé három lány került. Hány gyerekből áll a sor, ha a lányok száma 37-tel nagyobb a fiúk számánál?

11. Hány olyan $\overline{xyz}$ alakú háromjegyű szám van, amelynek számjegyeire igaz az $x + 10y + z = 105$ összefüggés?
Útmutatás: észrevesszük, hogy az $x + z$ szám utolsó számjegye 5. Így $x = 9, z = 6$; $x = 8$, $z = 7$; $x = 7, z = 8$; $x = 6, z = 9. \Rightarrow y = 9$.

12. Öt gyereknek együtt 460 képeslapja van. Ha az egyik gyerek a többi négy gyereknek négy-négy képeslapot ad, akkor az öt gyerek képeslapjainak száma öt egymásután következő szám lesz. Hány képeslapja van most az egyes gyerekeknek, és hány képeslapjuk volt eredetileg?

13. Adjuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, ha tudjuk, hogy $(a + 3)(7 + b \times c) = 88$. Melyik a legnagyobb szám? Melyik a legkisebb szám?
Útmutatás: $88 = 4 \cdot 22 = 8 \cdot 11 = \cdots$ innen $a + 3 = 4 \Rightarrow a = 1$, stb.

14. Adjuk meg az a, b és c számjegyeket, ha $\overline{abc} \times 3 = \overline{bcc}$!

15. Adott a következő számsorozat: 3, 8, 13, 18,...
 a) Adjuk meg a sorozat következő 4 elemét.
 b) Adjuk meg a sorozat 2009-edik elemét.
 c) Adjuk meg a sorozat első száz elemének összegét.

16. Számítsuk ki a $9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \cdots 9999}_{\substack{100 \\ \text{számjegy}}}$ összeget.

17. Adott a következő betűsorozat:

ABCDEDCBABCDECDAB…

Adjuk meg a sorozat 50., 100. és 2017. elemét!

18. Egy szuperszámítógép szuperképernyőjén 1000-szer írtuk egymásután a 2016-os számot, így:

$$\underbrace{201620162016 \cdots 2016}_{\text{4000 számjegy}}$$

Balról jobbra haladva egyenként összeadjuk a számjegyeket, majd töröljük azokat, amelyeket összeadtunk. Egy adott pillanatban az összeg értéke 2016. Hány számjegyet töröltünk?

19. Határozzuk meg az $\overline{xyz}$ számot ha $\overline{xyz} + \overline{yz} + z = 786$.

20. Adjuk meg az a számjegyet, ha $9 \times \overline{aa} = \overline{4aa} + 40$.

21. Egy ember a következőképpen megy fel a lépcsőkön: felfele megy három lépcsőfokot, majd visszalép két lépcsőfokot. Ezután felfele lép öt lépcsőfokot majd visszalép két lépcsőfokot.
    a. A hányadik lépcsőfokon van az emberünk a 801. lépés után?
    b. Hány lépés után ér el a 801. lépcsőre?

22. Adjuk meg az összes $\overline{xy}$ alakú számot, ha $48 \times \overline{xy} = \overline{3ab4}$.

23. Amennyiben $4 \times \overline{abcde4} = \overline{4abcde}$, adjuk meg az $\overline{abcde}$ számot.

24. Egy dobozban 12 piros, 12 sárga és 14 fekete golyó van. Legkevesebb hány golyót kell kiemelni a dobozból, hogy közötte biztosan legyen három különböző színű golyó?

25. Húsz hangya 40 búzaszemet 60 perc alatt szállít a mezőről a hangyabolyba. Mennyi idő alatt szállít el 10 hangya 20 búzaszemet?

26. Számoljuk ki a következő összegeket:
    a. $1 + 5 + 9 + \cdots + 397$;
    b. $2 + 7 + 12 + \cdots + 497$;
    c. $22 + 23 + 24 + \cdots + 2018$;
    d. $33 + 35 + 37 + \cdots + 2017$;
    e. $99 - 97 + 95 - 93 + \cdots + 3 - 1$.

    Útmutatás:
    a.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 \cdot 4 \\ 5 &= 1 + 1 \cdot 4 \\ 9 &= 1 + 2 \cdot 4 \\ &\cdots\cdots \\ 397 &= 1 + 94 \cdot 4 \end{aligned}$$

$1 + 5 + 9 + \cdots + 397 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{95 \cdot 1 = 95} + 4 \cdot (1 + 2 + \cdots + 94) = 95 + 2 \cdot 94 \cdot 95 =$ 17955. □

27. Adjuk meg a **KÖRTEKÖRTEKÖRTEKÖRT**… megfelelően hosszú betűlánc 2017. betűjét. Az első 2018 betűjében hányszor szerepel az **Ö** betű.

28. Tekintsük a következő számsort:

$$85, 92, 99, 106, \cdots, 2003.$$

   a. Hány számot tartalmaz a számsor?
   b. Hány számjegyet tartalmaz a számsor?
   c. Milyen számjegy van a 361. helyen a számjegyek sorában: 859299106113⋯2003

29. Számítsuk ki a következő összeget:

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{11 \cdots 1}_{100 \text{ db. számjegy}}$$

30. Adjuk meg az összes $\overline{ab}$ alakú számot, ha $a - b = 7$.

31. Határozzuk meg x-et az egyenletből:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 98 + x = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99.$$

32. Adjuk meg azoknak a kétjegyű természetes számoknak az összegét, amelyekben legalább egy 2-es számjegy szerepel.

33. Adjuk meg a kifejezés számjegyeinek összegét

$$n = 1 + 11 + 101 + 1001 + \cdots + 1\underbrace{000 \ldots 00}_{42 \text{ db. 0 számjegy}}1.$$

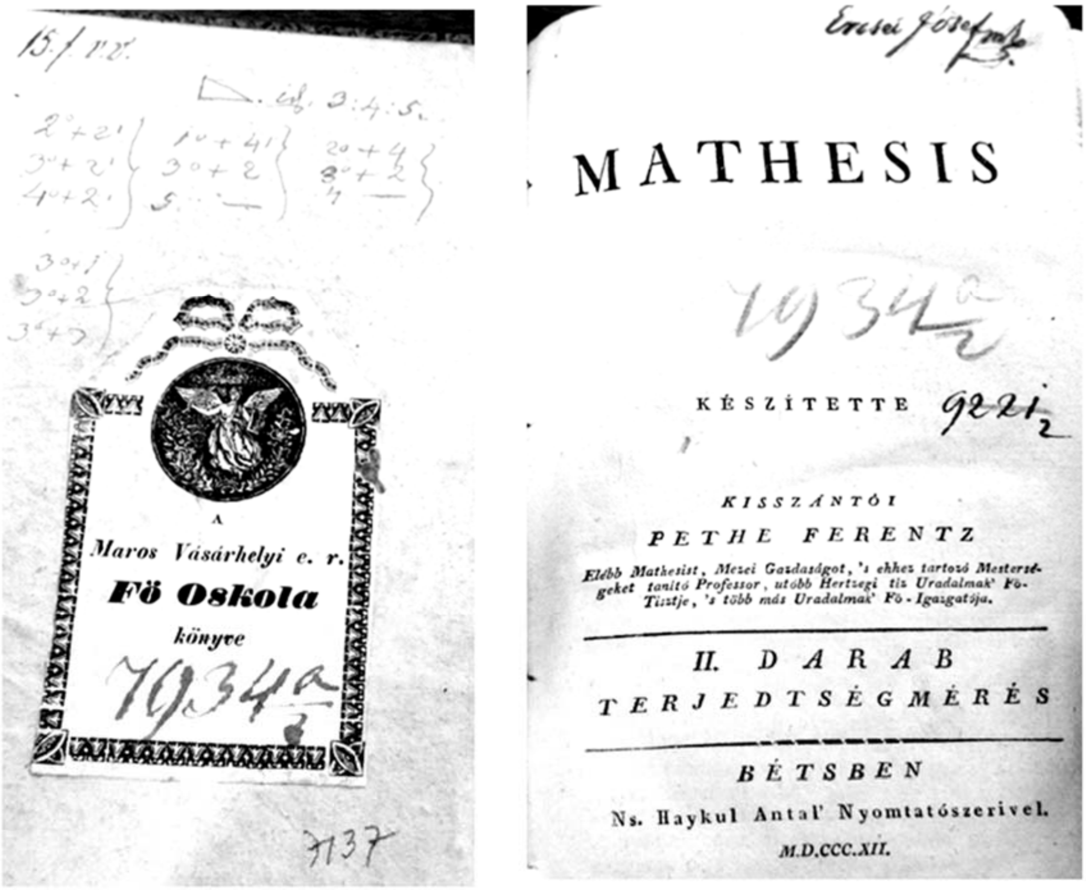
34. Egy $\overline{abcd}$ alakú szám szerencsés, ha $a - d = 2$ vagy $d - a = 2$. Hány szerencsés szám van?

35. Adott az $n = \underbrace{200920092009\ldots2009}_{2009\ 2017\text{- szer leírva}}$ szám. Adjuk meg a számnak a 9-cel való osztási maradékát.

10. FEJEZET

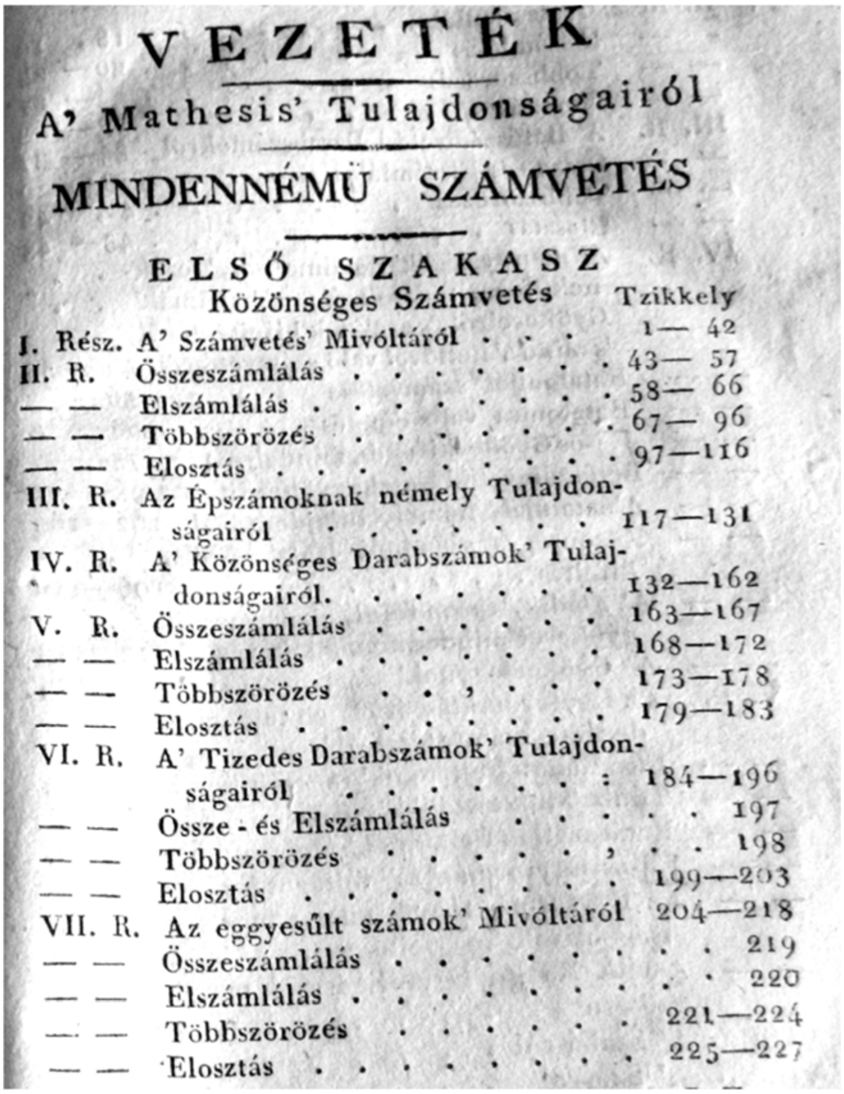
FELADATOK *PETHE FERENC: MATHESIS* (1812) **KÖNYVÉBŐL**

Ebben a fejezetben Pethe Ferenc 1812-ben megjelent *Mathesis* könyvéből közlünk feladatokat. Pethe Ferencről a Révai illetve Pallas nagylexikonokból tájékozódva megtudjuk, hogy 1762-ben született Büdszentmihályon az egykori Szabolcs vármegyében. A debreceni református főiskolán tanult. Tanulmányait 1788-ban Utrechtben majd „Német-és *Angol országban*" folytatta. Utrechtben 1794-ben 11 000 példányban kinyomatta a Károli Gáspár által magyarra fordított Bibliát, illetve 3000 példányban a Szenczi Molnár Albert fordítású Zsoltárok könyvét. Külföldről visszatérve, Bécsben 1796-ban elindítja a *Magyar Ujság, mely Magyar-és Erdélyországban a gazdaságot és szorgalmatosságot irányozza* című lapot. A lapot a 36. számtól *Vizsgálódó magyar gazda* címre változtatta át. 1798-ban *Ungarische Grammatik* címen németek számára magyar nyelvtant adott ki Bécsben. 1812-ben kiadja a *Mathesis* című kétkötetes munkáját (1. ábra).



1. ábra

A *Mathesis* két kötetében a szerző az aritmetika, az algebra és a mértan alapkérdéseivel foglalkozik
Az 1814. év kezdetén *Nemzeti gazda, vagy a magyar nemzet nemzeti gazdasága s ebbeli kereskedése virágzásának előmozdítása, melyet a nemzet szorgalmas fiainak segedelmekkel hetenkint készítgetett* címmel Bécsben gazdasági szaklapot indított. Pethe Ferenc 1832-ben halt meg, Szilágysomlyón van eltemetve. Sírja fölé veje 1835-ben 3 méter magas síremléket állíttatott



VEZETÉK

A' Mathesis' Tulajdonságairól

MINDENNÉMÜ SZÁMVETÉS

ELSŐ SZAKASZ

Közönséges Számvetés

2. ábra

A kétkötetes *Mathesis* a marosvásárhelyi Teleki könyvtárban is megtalálható: a mintegy 150 címet tartalmazó Bolyai-könyvtár egyik darabja. Joggal feltételezhetjük, hogy Bolyai Farkas ismerte és értékelte ezt a, könyvtárában megőrzött, művet.

A következő feladatokat Pethe Ferenc 1812-ben megjelentetett *Mathesis* könyvéből válogattuk. Pethe a *Mathesis*-ben ezeket a feladatokat szinte kizárólag egyenletekkel oldotta meg. Mi úgy gondoljuk, hogy a feladatok egy része az általános iskola negyedik osztályosainak szintjén is megoldható, az ott tanított módszerekkel. A feladatok szövegvilága külön érdekességet, ízt, hangulatot kölcsönöz a feladatoknak. A feladatok egy részét megoldottuk, másokhoz útmutatást adtunk, és vannak feladatok, amelyek megoldását az olvasóra bízzuk.

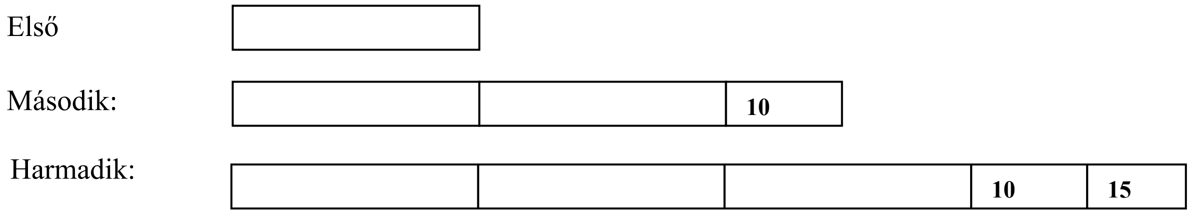
I. KÉRDÉS

Három *Veremásó* keresett eggyütt 875 forintot: a' második 10 forintal keresett többet kétannyinál mint az első; a' harmadik pedig 15 forintal többet mint a' két első: — melyik menynyit keresett?

3. ábra

1. Három veremásó keresett együtt 875 forintot: a második 10 forinttal keresett többet kétannyinál, mint az első, a harmadik pedig 15 forinttal többet, mint a két első. Melyik mennyit keresett (3. ábra)?

Útmutatás:



4. ábra

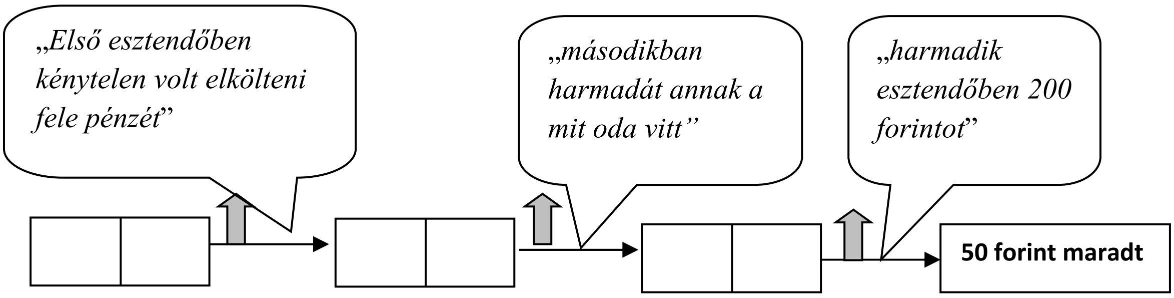
III. KÉRDÉS

Egy *Hajtzibáló* [friseur] Bétsből Debretzenbe ment lakni a' mesterségét folytatni; de 3 esztendő alatt elszegényedett, pedig vólt neki valamije. Első esztendőben kéntelen vólt elkőlteni fele pénzét; másodikban harmadát annak a' mit oda vitt; harmadik esztendőben 200 forintot, mikor már tsak 50 forintja maradt a' viszsza menetelre: — hány forintja vólt mikor leköltözött; 's mit kőltött esztendőnként?

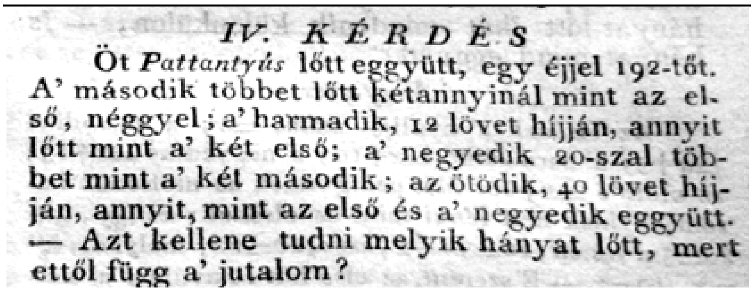
5. ábra

2. Egy hajcibáló (friseur) Bécsből Debrecenbe ment lakni, a mesterségét folytatni, de 3 esztendő alatt elszegényedett, pedig volt neki valamije. Első esztendőben kénytelen volt elkölteni fele pénzét, a másodikban harmadát annak, amit oda vitt, harmadik esztendőben 200 forintot, mikor már csak 50 forintja maradt a vissza menetelre. Hány forintja volt mikor leköltözött, és mit költött esztendőnként (5. ábra)?

Útmutatás:



6. ábra



IV. KÉRDÉS

Öt Pattantyús lőtt eggyütt, egy éjjel 192-től. A' második többet lőtt kétannyinál mint az első, néggyel; a' harmadik, 12 lövet híjján, annyit lőtt mint a' két első; a' negyedik 20-szal több-bet mint a' két második; az ötödik, 40 lövet híj-ján, annyit, mint az első és a' negyedik eggyütt. — Azt kellene tudni melyik hányat lőtt, mert ettől függ a' jutalom?

7. ábra

3. Öt pattantyús lőtt együtt, egy éjjel 192-t. A második többet lőtt kétannyinál, mint az első, néggyel, a harmadik 12 lövet híján, annyit lőtt, mint a két első, a negyedik 20-szal többet, mint a két második, az ötödik, 40 lövet híján, annyit, mint az első és a negyedik együtt. Azt kéne tudni melyik hányat lőtt, mert ettől függ a jutalom?

Megjegyzés: Az egyes pattantyúsok lövedékszámát a megoldás érdekében módosítani fogjuk.

Útmutatás:
„*Öt pattantyús lőtt együtt, egy éjjel 192-t*”

Első pattantyús:



„*A második többet lőtt kétannyinál, mint az első, néggyel*”
Második pattantyús:



„ *a harmadik 12 lövet híján, annyit lőtt, mint a két első*” azaz*, ha még 12-t lőtt volna, akkor pontosan annyit lőtt volna, mint az első kettő.* A megoldás gördülékenysége miatt adjuk hozzá ezt a 12 löveget az összes löveghez. Akkor:

„*Öt pattantyús lőtt együtt, egy éjjel 192+12 = 204-et*”

Harmadik pattantyús: 

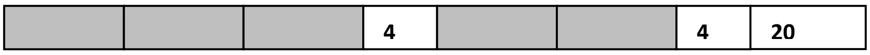
„*a negyedik 20-szal többet, mint a két második*” – azaz kétszer annyit lőtt, mint a második és még 20-at

Negyedik pattantyús: 

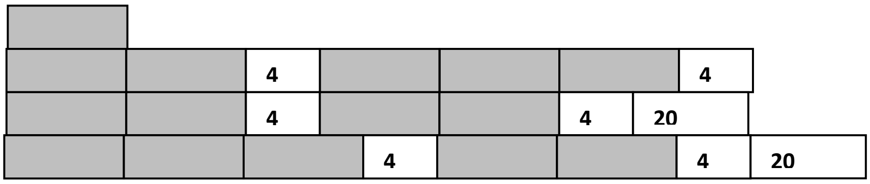
„*az ötödik, 40 lövet híján, annyit, mint az első és a negyedik együtt*” – azaz, ha az ötödik még 40 löveget ellőtt volna, akkor pontosan annyit lőtt volna, mint az első és a negyedik. Hozzáadjuk az összes löveghez ezt a negyven löveget, és úgy tekintjük, hogy az ötödik pontosan annyit lőtt, mint az első és a negyedik:

„*Öt pattantyús lőtt együtt, egy éjjel 192+12+40 = 244-et*”

Ötödik pattantyús:

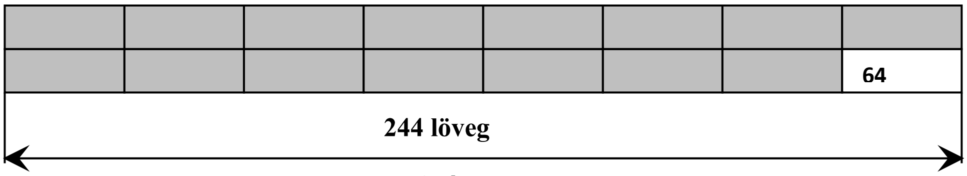


Végül:



8. ábra

Átrendezve az ábrát, azt kapjuk, hogy:



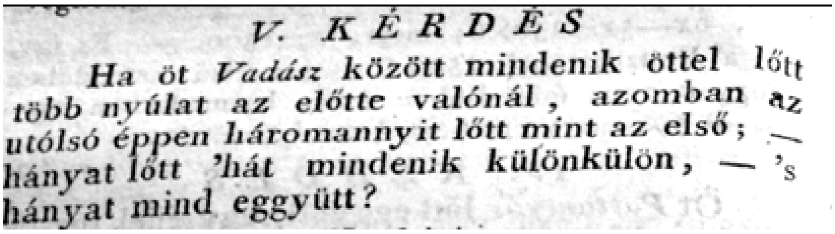
9. ábra

Az ábrából következik, hogy 244-64 = 180 lövegnek megfelel 15 téglalap, így egy téglalap megfelel 180 : 15 = 12 lövegnek.

Tehát, figyelembe véve az ábrákat és a feladata szövegét, kapjuk, hogy:

- az első pattantyús 12 löveget lőtt.
- a második pattantyús 12 + 12 + 4 = 28 löveget lőtt
- a harmadik pattantyús 12 + 28 – 12 = 28 löveget lőtt
- a negyedik pattantyús 20 + 28 + 28 = 76 löveget lőtt
- az ötödik pattantyús 12 + 76 – 40 = 48

Próba: 12 + 28 + 28 +76 + 48 = 192.□



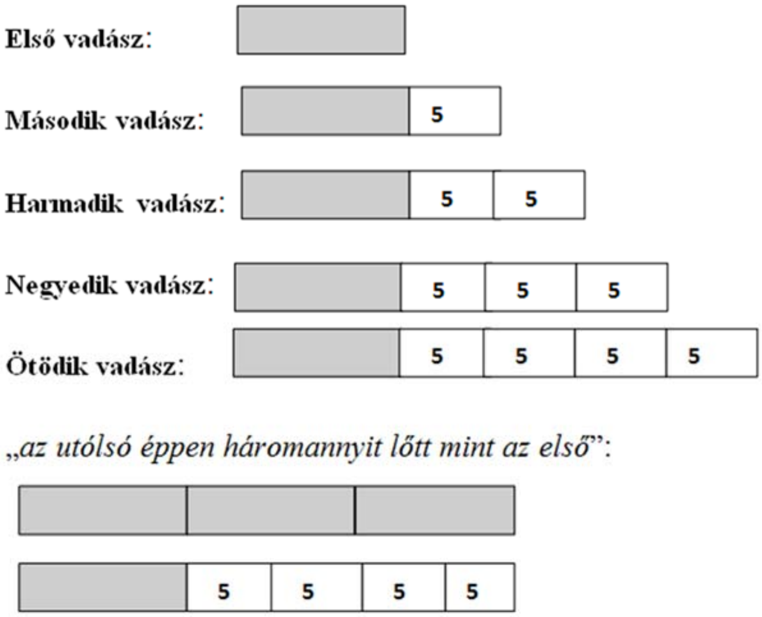
V. KÉRDÉS

Ha öt *Vadász* között mindenik öttel lőtt több nyúlat az előtte valónál, azomban az utólsó éppen háromannyit lőtt mint az első; — hányat lőtt 'hát mindenik különkülön, — 's hányat mind együtt?

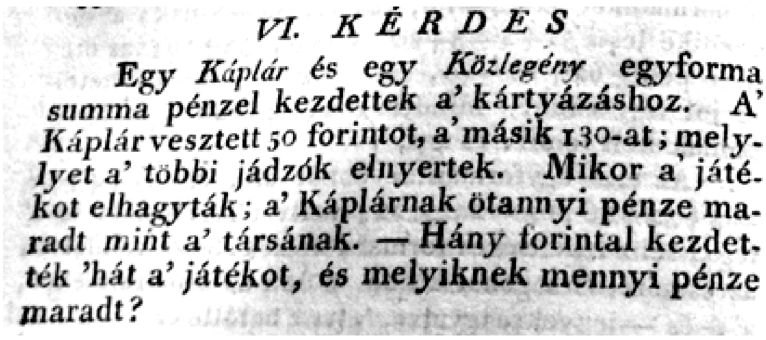
10. ábra

4. Ha öt vadász között mindenik öttel lőtt több nyulat az előtte valónál, azonban az utolsó éppen háromannyit lőtt, mint az első, akkor hányat lőtt hát mindenik külön-külön, s hányat mind együtt (10 ábra)?

Útmutatás:



11. ábra



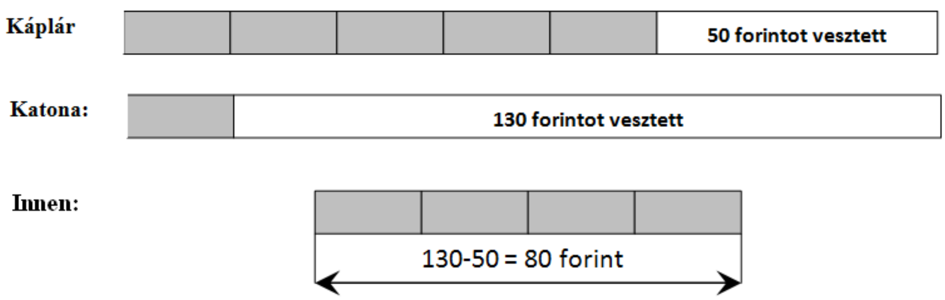
VI. K É R D E S

Egy *Káplár* és egy *Közlegény* egyforma *summa* pénzel kezdettek a' kártyázáshoz. A' *Káplár vesztett* 50 forintot, a' másik 130-at; mely-lyet a' többi jádzók elnyertek. Mikor a' játékot elhagyták; a' Káplárnak ötannyi pénze maradt mint a' társának. — Hány forintal kezdették 'hát a' játékot, és melyiknek mennyi pénze maradt?

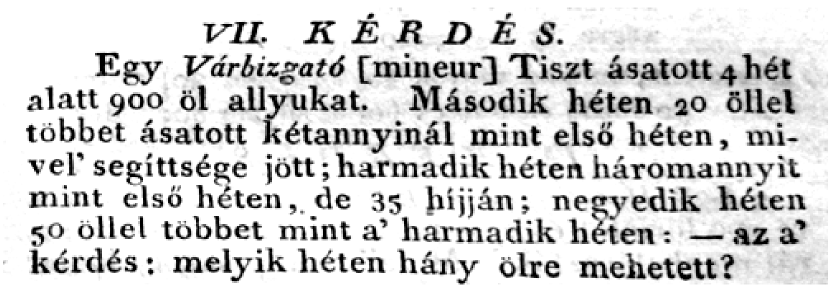
12. ábra

5. Egy káplár és egy közlegény egyforma summa pénzzel kezdettek a kártyázáshoz. A Káplár vesztett 50 forintot, a másik 130-at, melyet a többi játszók elnyertek. Mikor a játékot elhagyták, a káplárnak öt annyi pénze maradt, mint a társának. Hány forinttal kezdették hát a játékot, és melyiknek mennyi pénze maradt (12. ábra)?

Útmutatás:



13. ábra

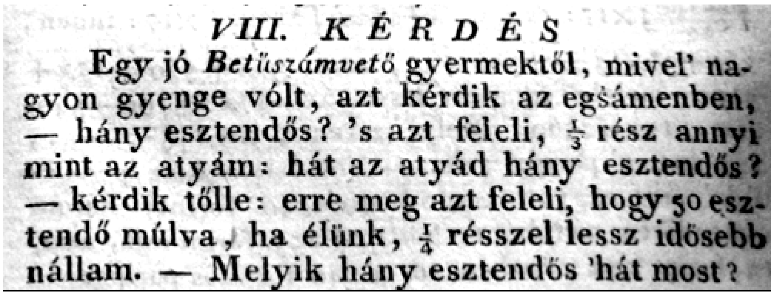


VII. K É R D É S.

Egy *Várbizgató* [mineur] Tiszt ásatott 4 hét alatt 900 öl allyukat. Második héten 20 öllel többet ásatott kétannyinál mint első héten, mivel' segíttsége jött; harmadik héten háromannyit mint első héten, de 35 híjján; negyedik héten 50 öllel többet mint a' harmadik héten: — az a' kérdés: melyik héten hány ölre mehetett?

14. ábra

6. Egy várbizgató (*mineur*) tiszt ásatott 4 hét alatt 900 öl lyukat. Második héten 20 öllel többet ásatott kétannyinál, mint az első héten, mivel segítsége jött, harmadik héten háromannyit, mint első héten, de 35 híján, negyedik héten 50 öllel többet, mint a harmadik héten. Az a kérdés: melyik héten hány ölre mehetett (14. ábra)?



VIII. KÉRDÉS

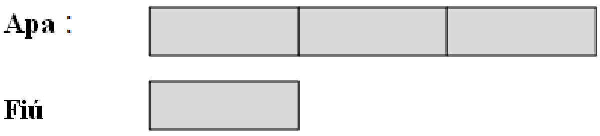
Egy jó *Betűszámvető* gyermektől, mivel' nagyon gyenge vólt, azt kérdik az egsámenben, — hány esztendős? 's azt feleli, $\frac{1}{3}$ rész annyi mint az atyám: hát az atyád hány esztendős? — kérdik tőlle: erre meg azt feleli, hogy 50 esztendő múlva, ha élünk, $\frac{1}{4}$ résszel lessz idősebb nállam. — Melyik hány esztendős 'hát most?

15. ábra

7. Egy jó betűszámvető gyermektől, mivel nagyon gyenge volt, azt kérdik az egzámenben, [hogy] hány esztendős, s azt feleli, 1/3 rész annyi, mint az atyám. Hát az atyád hány esztendős, kérdik tőle. Erre meg azt feleli, hogy 50 esztendő múlva, ha élünk, 1/4 résszel lesz idősebb nálam. Melyik hány esztendős hát most (15. ábra)?

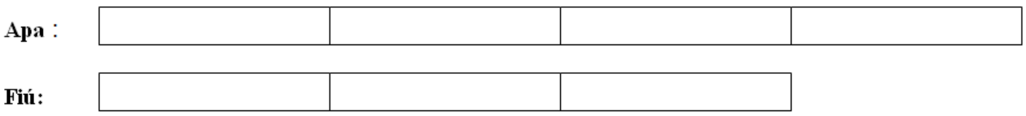
Útmutatás:

Most : „... $\frac{1}{3}$ *rész annyi mint az atyám* ...”



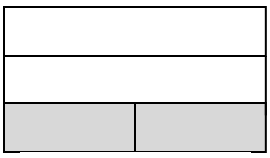
16. ábra

Ötven év múlva: „...*ha élünk,* $\frac{1}{4}$ *résszel lesz idősebb nálam*...” (17. ábra).



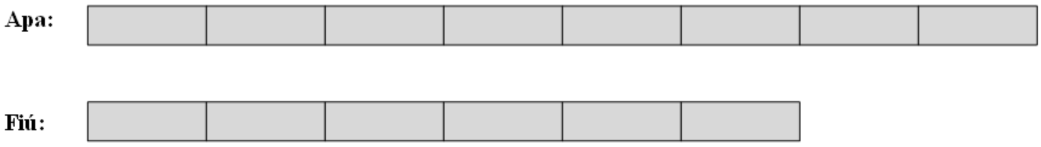
17. ábra

Figyelembe vesszük, hogy a *korkülönbség* nem változott (18. ábra).



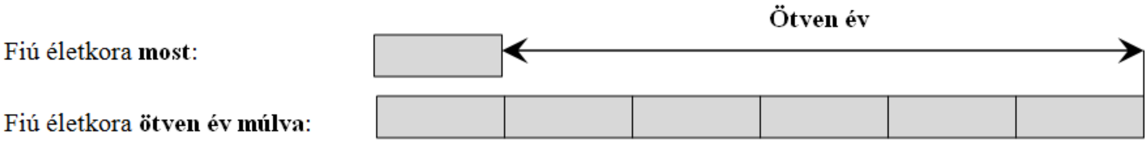
18. ábra

Az ötven év múlva bekövetkező helyzetet a 19. ábra szemlélteti.



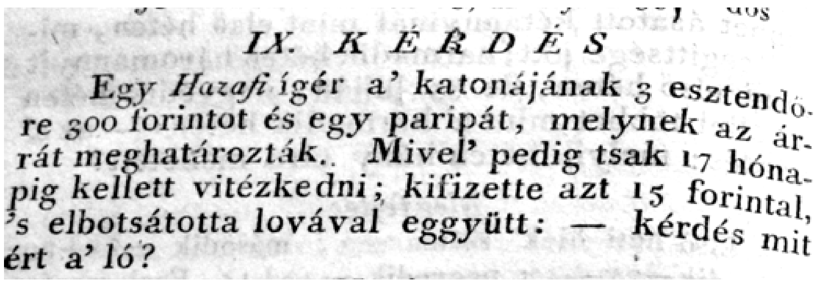
19.ábra

A fiú életkorát *most* és *ötven év múlva,* a 20. ábra szemlélteti.



20. ábra

Tehát: most a fiú 10 éves, az apa 30 éves.



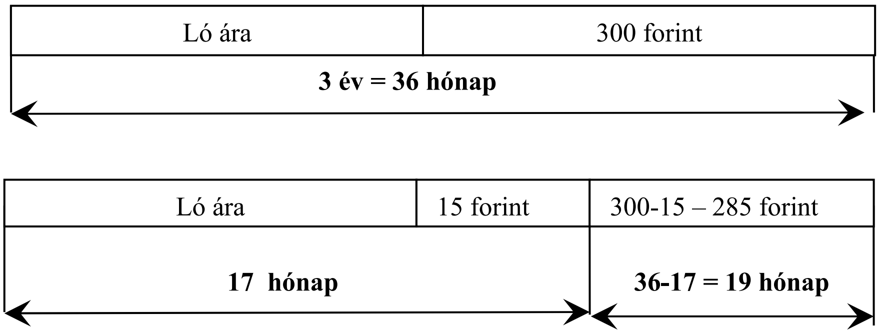
IX. KÉRDÉS

Egy *Hazafi* ígér a' katonájának 3 esztendőre 300 forintot és egy paripát, melynek az árát meghatározták. Mivel' pedig tsak 17 hónapig kellett vitézkedni; kifizette azt 15 forintal, 's elbotsátotta lovával eggyütt: — kérdés mit ért a' ló?

21. ábra

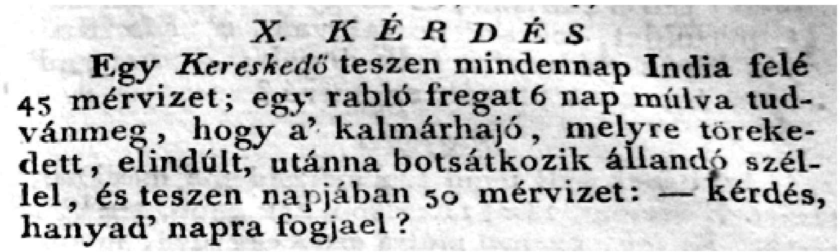
8. Egy hazafi ígér a katonájának 3 esztendőre 300 forintot és egy paripát, melynek az árát meghatározták. Mivel pedig csak 17 hónapig kellett vitézkedni, kifizette azt 15 forinttal s elbocsátotta lovával együtt. Kérdés, mit ért a ló (21. ábra)?

Útmutatás:



22. ábra

Látható, hogy a katonának 19 hónapra 285 forint jár, azaz *egy hónapra* 285 : 19 = *15 forint*. Ezek szerint 17 hónapra 17 × 15 = 255 forint fizetése volt a katonának forintokban számolva. Innen könnyen kiszámítható a ló ára.

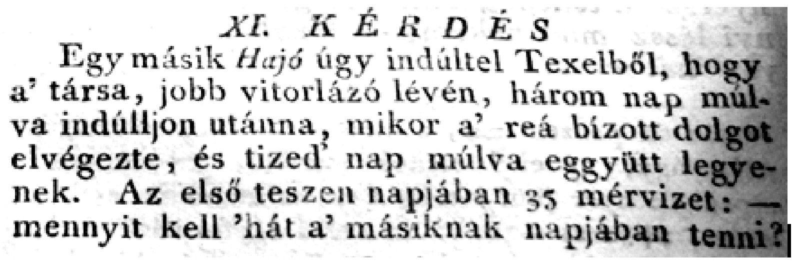


X. KÉRDÉS

Egy *Kereskedő* teszen mindennap India felé 45 mérvizet; egy rabló fregat 6 nap múlva tudvánmeg, hogy a' kalmárhajó, melyre törekedett, elindúlt, utánna botsátkozik állandó széllel, és teszen napjában 50 mérvizet: — kérdés, hanyad' napra fogjael?

23. ábra

9. Egy kereskedő [meg] teszen minden nap India felé 45 mérvizet. Egy rabló fregatt 6 nap múlva tudván meg, hogy a kalmárhajó, melyre törekedett, elindult, utána bocsátkozik állandó széllel, és teszen napjában 50 mérvizet. Kérdés, hányad napra fogja el (23. ábra)?

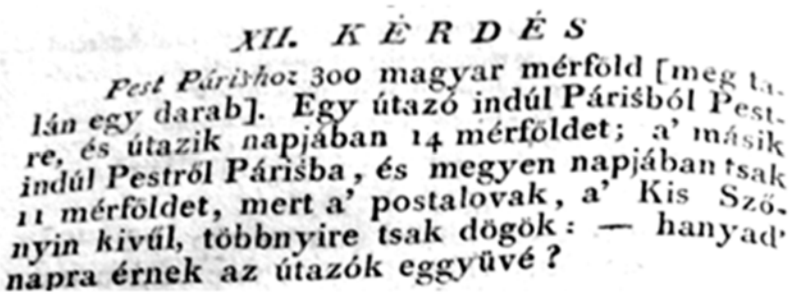


XI. KÉRDÉS

Egy másik *Hajó* úgy indúltel Texelből, hogy a' társa, jobb vitorlázó lévén, három nap múlva indúlljon utánna, mikor a' reá bízott dolgot elvégezte, és tized' nap múlva eggyütt legyenek. Az első teszen napjában 35 mérvizet: — mennyit kell 'hát a' másiknak napjában tenni?

24. ábra

10. Egy másik hajó úgy indult el Texelből, hogy a társa, jobb vitorlázó lévén, három nap múlva induljon utána, mikor a reá bízott dolgot elvégezte, és tized nap múlva együtt legyenek. Az első teszen napjában 35 mérvizet. Mennyit kell hát a másiknak napjában tenni (24. ábra)?

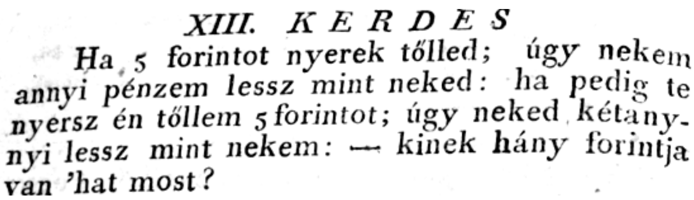


XII. KÈRDÉS

Pest Párishoz 300 magyar mérföld [meg talán egy darab]. Egy útazó indúl Párisból Pestre, és útazik napjában 14 mérföldet; a' másik indúl Pestről Párisba, és megyen napjában tsak 11 mérföldet, mert a' postalovak, a' Kis Szőnyin kivűl, többnyire tsak dögök: — hanyad' napra érnek az útazók eggyűvé?

25. ábra

11. Pest Párishoz 300 magyar mérföld (meg talán egy darab). Egy utazó indul Párizsból Pestre, és utazik napjában 14 mérföldet, a másik indul Pestről Párizsba, és megyen napjában csak 11 mérföldet, mert a postalovak, a Kis Szőnyin kívül, többnyire csak dögök. Hányad napra érnek az utazók együvé (25. ábra)?



XIII. KERDES

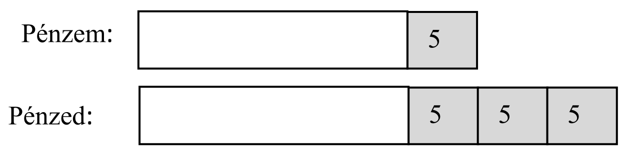
Ha 5 forintot nyerek tőlled; úgy nekem annyi pénzem lessz mint neked: ha pedig te nyersz én tőllem 5 forintot; úgy neked kétannyi lessz mint nekem: — kinek hány forintja van 'hat most?

26. ábra

12. Ha 5 forintot nyerek tőled. úgy nekem annyi pénzem lesz, mint neked, ha pedig te nyersz én tőlem 5 forintot, úgy neked kétannyi lesz mint nekem. Kinek hány forintja van hát most (26. ábra)?

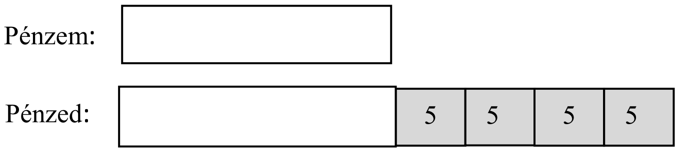
Útmutatás:

Első mondat ábrázolása (27. ábra) : „*Ha 5 forintot nyerek tőled; úgy nekem annyi pénzem lesz mint neked*."



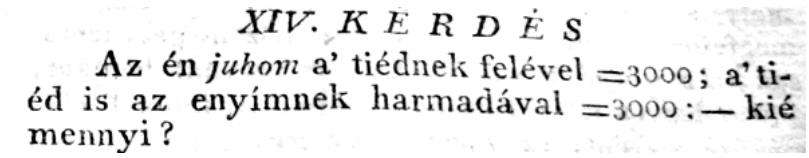
27. ábra

Második mondat ábrázolása: „*Ha pedig te nyersz én tőlem 5 forintot, úgy neked kétannyi lesz mint nekem*.” (28. ábra).



28. ábra

Megállapítjuk, hogy a második mondat eseménye után kialakult helyzetben pénzem 20 forint, pénzed 40 forint. Követezésképpen eredetileg nekem 20 + 5 = 25 forintom volt, neked meg 20 + 15 = 35 forintod volt.

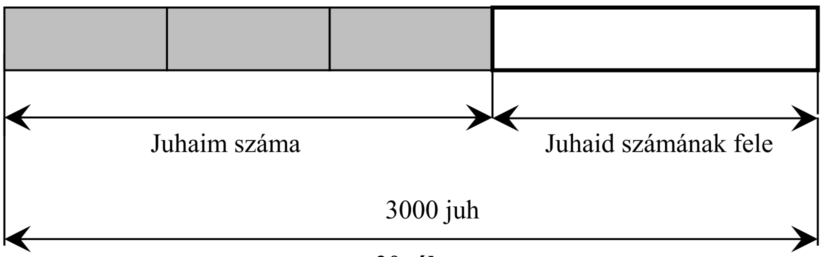

XIV. KÉRDÉS

Az én *juhom* a' tiédnek felével =3000; a' tiéd is az enyímnek harmadával =3000: — kié mennyi?

29. ábra

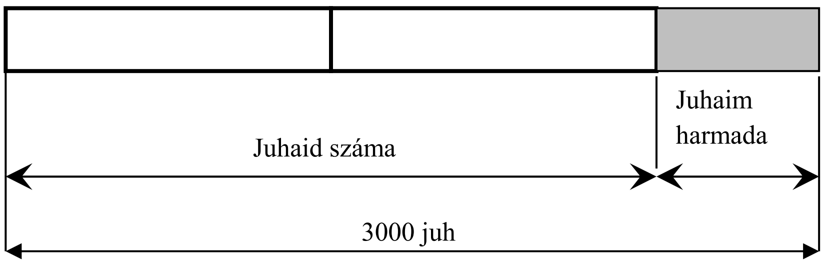
13. Az én *juhom* a tiédnek felével = 3000, a tied is az enyémnek harmadával = 3000.
Kié mennyi?

Útmutatás: Juhaim száma osztható hárommal: „*a tied is az enyémnek harmadával = 3000*”.
Juhaid száma osztható kettővel: „Az *én juhom a tiédnek felével = 3000*” (29. ábra).
Első mondat ábrázolása: „*Az én juhom a tiédnek felével = 3000*”(30. ábra).



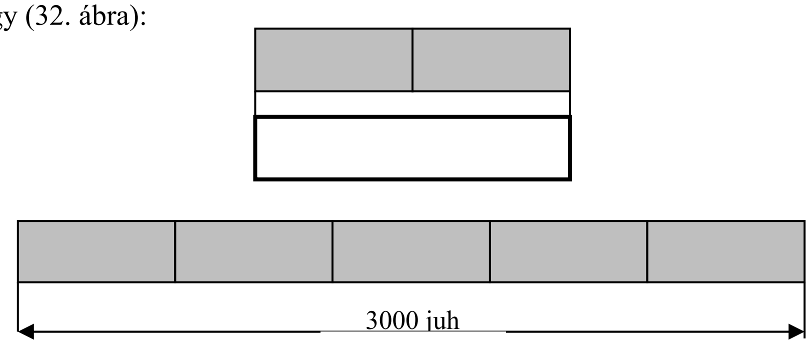
30. ábra

Második mondat ábrázolása: „*a' tied is az enyémnek harmadával = 3000*” (31. ábra).



31. ábra

Innen következik, hogy (32. ábra):



32. ábra

KITŰZÖTT FELADATOK



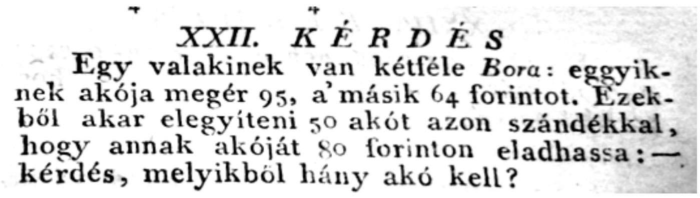
XVII. KÉRDÉS

Ádám meg *Éva* együtt 30 almát ettek meg.

Éva 18-al többet ett mint Ádám: — melyik mennyit ett? — E' tsak ollyan, mintha kérdenék: — Melyik két szám az, melynek a' summája =30, a' kettő közt való külömbség pedig =18?

33. ábra

1. *Ádám* meg *Éva* együtt 30 almát ettek meg. Éva 18-al többet e[ve]tt mint Ádám: – melyik mennyit e[ve]tt? E[z] csak olyan, mintha kérdenék: Melyik két szám az, melynek a summája = 30, a kettő közt való különbség pedig = 18 (33. ábra).

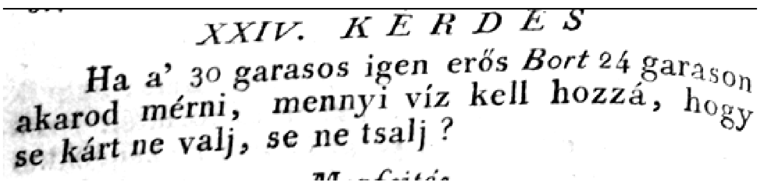


XXII. KÉRDÉS

Egy valakinek van kétféle *Bora*: eggyiknek akója megér 95, a' másik 64 forintot. Ezekből akar elegyíteni 50 akót azon szándékkal, hogy annak akóját 80 forinton eladhassa: — kérdés, melyikből hány akó kell?

34. ábra

2. Egy valakinek van kétféle b*ora*: egyiknek akója megér 95, a másik 64 forintot. Ezekből akar elegyíteni 5o akót azon szándékkal, hogy annak akóját 8o forinton eladhassa. Kérdés, melyikből hány akó kell (34. ábra)?



XXIV. KÉRDÉS

Ha a' 30 garasos igen erős *Bort* 24 garason akarod mérni, mennyi víz kell hozzá, hogy se kárt ne valj, se ne tsalj?

35. ábra

3. Ha a 30 garasos igen erős bort 24 garason akarod mérni, mennyi víz kell hozzá, hogy se kárt ne vallj, se ne csalj (35. ábra)?

XXV. KÉRDÉS

Egy ötvös akar elegyíteni 15 és 7 próbás *E-züst-ből*, 3 márk vagy 48 lót ollyan ezüstöt, mely 13 próbás legyen: — melyikből mennyit kell neki venni?

36. ábra

4. Egy ötvös akar elegyíteni 15 és 7 próbás ezüstből, 3 márka vagy 48 lót olyan ezüstöt, mely 13 próbás legyen. Melyikből mennyit kell neki venni (36. ábra)?

Bibliográfia

1. Bălăucă Artur: *Aritmetică 1300 de probleme semnificative . Olimpiade şi centre de excelenţă,* Editura Taida, 2012.
2. Bálint Mária: *Matematika Tanulmányi Útmutató,* Kézirat.
3. Căiniceanu Gheorghe (szerk.): *Matematică – Olimpiade şi concursuri şcolare clasele IV – VI 2014 – 2015*, Editura Paralela 45, 2015.
4. Căiniceanu Gheorghe (szerk.): *Matematică – Olimpiade şi concursuri şcolare clasele IV – VI 2016 – 2017,* Editura Paralela 45, 2017.
5. Căiniceanu Gheorghe (szerk.) : *Matematică – Olimpiade şi concursuri şcolare clasele IV – VI 2015 – 2016,* Editura Paralela 45, 2016.
6. http://matek.ide.sk/ [2018 - április]
7. http://matek-fizika.info/mat_nyomtathato/01_Szoveges_feladatok/forras/szov_feladatok.docx. [2018 - április]
8. http://odorheiusec.extensii.ubbcluj.ro/vizsgazoknak/Felad_gradIIfelkBM.doc. [2018 - április].
9. http://vargaandras.uw.hu/mat/hu/5_hu/feladatok_5_hu/szoveges_feladatok_1.pdf [2018 - április].
10. http://www.magyarlapad.ro/amatek/5oszt_szoveges_feladatok_-_megoldasi_modszerek.pdf
11. Linţ Maranda, Linţ Dorin, Marinescu Rozalia, Marinescu Dan Ştefan, *Matematica de excelenţă pentru concursuri olimpiade şi centre de excelenţă.,* Editura Paralela 45, 2013.
12. Marchiş Julianna, *Szöveges feladatok az elemi osztályokban,* Presa Universitară Clujeană, 2017.
13. Pârâiala Viorica, Pârâiala Dunitru, Pârâiala Cristian George: *Teste de Matematică – Concursuri şcolare în clasele a III-a şi a IV-a,* Editura Euristica, 2016.
14. Tuzson Zoltán : *Hogyan oldjunk meg aritmetika feladatokat? – Módszertani feladatgyűjtemény Harmadik kiadás,* Ábel Kiadó, 2011.

UNIVERSITAS • NAPOCENSIS
ROMANIA
PRESA UNIVERSITARĂ

ISBN: 978-606-37-0357-7